现代应用数学丛书

几何学

〔日〕矢野健太郎 著

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

几何学

〔日〕矢野健太郎 著

孙澤瀛 譯



上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中譯本。本书包括向量代数、向量分析、微分几何等三篇，分九章。簡单扼要地介紹了这三方面的主要內容。在向量代数方面，除介紹了向量的基本运算及其应用之外，对于張量的概念也作了說明。在向量分析中，对于微分运算子、积分性质、曲綫坐标等作了系統介紹，在微分几何一篇中，重点介紹了曲面論和黎曼空間的一些基本性质。本书可供高等学校数学系师生及工程技术人員参考。

现代应用数学丛书

几　何　学

原 书 名　几　何　学
原 著 者　(日)矢野健太郎
原出版者　岩 波 书 店
譯　　者　孙　泽　瀛

上海科学技术出版社出版(上海瑞金二路 450 号)
上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷四厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1156　1/32　印張 4　字数 94,000
1961 年 8 月第 1 版　1965 年 12 月第 2 次印刷
印数 16,001—17,000

统一书号 13119·415　定价(科六) 0.60 元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。书中收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国科学技术工作者可能是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在某些譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯者序

这本书的編写方法和一般的微分几何学不同，主要是針对物理学和力学方面的应用而編写的。为此，它着重叙述了向量和其扩充的張量的一些基础知識及其与物理学和力学有关的內容。

首先，它引进了向量代数的一般知識，根据向量在三重系变换下的变换規律很自然地引入了張量概念，作为向量的扩充。

其次，对向量分析的部分，主要研究物理和力学中所需要的向量場、張量場、梯度、散度和旋度等一些概念。随后就叙述了向量的积分，这也是对实际应用很有意义的一节。这里还引进了曲綫坐标作为后文应用的准备。

最后，在微分几何部分，扼要地叙述了曲面論和黎曼空間的主要內容。在卷末还极概略地提到一点李微分的內容。这是一种新的微分运算子，它可以应用于数量、向量、張量以及其他几何量。

本书的內容安排，尽量照顾到应用是一个特点。但是在叙述过程中，理論联系实际仍嫌不够，許多可以应用到的流体力学、彈性力学、电动力学的內容沒有提到或很少提到，实际例証也举得不多。希望讀者参考有关书籍以弥补不足。

笔者的写法很簡洁，一切公式的推导以及定理的証明，几乎都用最簡单的、直接的方法，这可說是本书又一个特点。但其中有一些定理，如三重向量积公式，梯度和旋度的概念，只介紹了分析公式，如能扼要地提一下几何及物理意义，可能对讀者更有帮助。

本书对于学习場論（向量分析）、張量分析以及黎曼几何的同志，可以作为比較省力的入門讀物。因此，值得向讀者推荐。

本譯本承錢端壮教授协助审校，特此致謝。

孙澤瀛　1961年7月

目　　录

出版說明
譯者序
第1篇　向量代数……1
第1章　定义与初等运算……1
§ 1　向量的定义与表現……1
§ 2　向量的加法与减法……2
§ 3　向量的綫性相关性与綫性无关性……5
§ 4　解析几何学上的应用……8
第2章　內积与外积……10
§ 5　向量的內积……10
§ 6　向量內积的分配法則……11
§ 7　向量的外积……12
§ 8　向量外积的分配法則……13
第3章　向量代数的一些公式……17
§ 9　数量三重积……17
§ 10　向量三重积……19
§ 11　向量三重系……20
§ 12　三重系的变换……24
§ 13　張量……25
第2篇　向量分析……29
第4章　向量的微分……29
§ 14　向量的微分……29
§ 15　在空間曲綫論中的应用……31
§ 16　在运动学中的应用……35
第5章　微分运算子……40
§ 17　数量的梯度……40
§ 18　向量的散度……43
§ 19　向量的旋度……47
§ 20　关于梯度、散度、旋度的一些公式……48

第6章 向量的积分 ……51
§21 綫积分 ……51
§22 面积分 ……53
§23 关于散度的定理 ……55
§24 Stokes 定理 ……57
§25 Green 定理 ……61
第7章 曲綫坐标 ……63
§26 曲綫坐标 ……63
§27 基本形式 ……65
§28 关于曲綫坐标系的支量 ……68
§29 基本方程 ……72
§30 协变微分 ……75
§31 張量 $e_{\nu\mu\lambda}$ 和 $e^{\nu\mu\lambda}$ ……78
§32 梯度 ……81
§33 散度 ……83
§34 旋度 ……85
第3篇 微分几何 ……88
第8章 曲面論 ……88
§35 曲面 ……88
§36 基本方程 ……91
§37 Gauss 与 Codazzi 方程 ……94
§38 測地綫 ……99
§39 Meusnier 定理 ……101
§40 曲率綫 ……104
§41 漸近曲綫 ……106
第9章 Riemann 空間 ……108
§42 Riemann 空間 ……108
§43 向量 ……109
§44 張量 ……110
§45 Levi-Civita 平行性 ……112
§46 曲率張量 ……114
§47 Lie 微分 ……117

第1篇 向量代数

第1章 定义与初等运算

§1 向量的定义与表現

几何学及物理学里，有綫段长、三角形面积、四面体体积、質量、温度、功、能量、电荷等一类的量，它們在測度单位規定后，可单由一个数值完全表示出来，又有平行移动、速度、加速度、力等一类的量，它們在測度单位規定后，不能单由一个数值而要附以方向才能完全表示出来。

前一种量，那就是測度单位規定后单由一个数值完全表示出来并服从普通代数运算法則的量，称为**数量**(或标量)。

与此相反，后一种量，那就是測度单位規定后不能单由一个数值表示还要指定方向才能完全表示出来、服从以下列举的特殊运算法則的量，称为**向量**(或矢量)。

向量旣然是具有数值与方向的量，过空間任意一点，例如說过点O的有向綫段OA就能完全把它表示出来，OA之长表示它的数值，OA的方向表示它的方向。这时O称为它的**起点**，A称为它的**終点**。为了使有向綫段清楚地表示一个向量起見，有时在写法上加一个箭头，写成$\overrightarrow{OA}$。

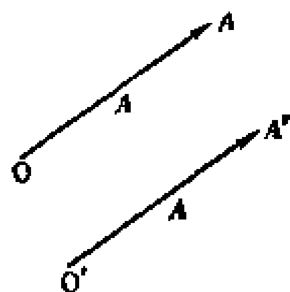


图 1.1

此外，为了书写的便利起見，常用一个字母来表示向量。我們采用普通的小写字母，例如a，表示数量，以粗

黑的大写字母，例如 $\boldsymbol{A}$，表示向量。这就是說

$$\boldsymbol{A}=\overrightarrow{OA}.$$

过空間的另一点 O' 引有向綫段 $O'A'$，以向量 $\boldsymbol{A}$ 的数值定这条綫段的长度，以向量 $\boldsymbol{A}$ 的方向定这条綫段的方向，那么 $\overrightarrow{O'A'}$ 仍表示同一向量 $\boldsymbol{A}$. 这就是說，空間內具有同一长度、同一方向的一切有向綫段表示同一向量。

向量 $\boldsymbol{A}$ 用有向綫段 $\overrightarrow{OA}$ 表示时，綫段 OA 之长称为**向量 $\boldsymbol{A}$ 的长**，**或大小**，**或絕对值**，以 $|\boldsymbol{A}|$ 或 a 表示。

长度为1的向量叫做**单位向量**。

§2 向量的加法与减法

正如前一节所說的，向量是可用具有长度与方向的有向綫段表示的一种量，而且服从一套特殊的运算规則。以下就要順次地說明这套运算规則。

首先，**向量 $\boldsymbol{A}$ 与向量 $\boldsymbol{B}$ 之和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$** 是这样定义的：以表示向量 $\boldsymbol{A}$ 的有向綫段 $\overrightarrow{OA}$ 之終点 A 作为起点，引表示向量 $\boldsymbol{B}$ 的有向綫段 $\overrightarrow{AC}$，那么，有向綫段 $\overrightarrow{OC}$ 所表示的向量就規定为它們的和。向量 $\boldsymbol{A}$ 加向量 $\boldsymbol{B}$ 构成向量 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的上述法則称做**向量加法的三角形法則**。

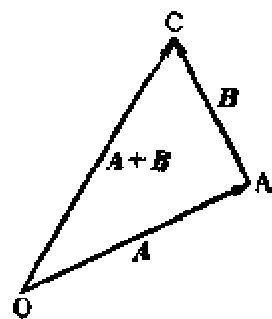


图 2.1

由于以上規定，向量 $\boldsymbol{A}$ 与向量 $\boldsymbol{B}$ 之和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也可以用如次的方式作出来。如以有向綫段 $\overrightarrow{OA}$ 表示向量 $\boldsymbol{A}$，有向綫段 $\overrightarrow{OB}$ 表示向量 $\boldsymbol{B}$，則表示和的有向綫段是以 OA, OB 为邻边的平行四边形 $OACB$ 之对角綫 $\overrightarrow{OC}$. 象这样由向量 $\boldsymbol{A}$ 加向量 $\boldsymbol{B}$ 作出向量 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的法則称做**向量加法的平行四边形法則**。

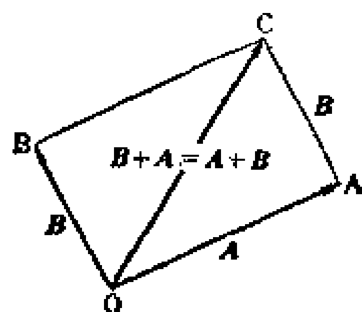


图 2.2

从以上的說明，向量加法滿足

(1) $$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$$

是很明显的了。这就是說**向量的加法满足交換律**。

如果有三个向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, 要想作它們的和，首先按照上述法則作出 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，然后对所得的向量再按照上述法則加以 $\boldsymbol{C}$ 作出 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$ 就行了。这时从图 2.3 很明显地看出

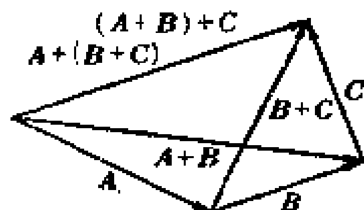


图 2.3

(2) $$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}),$$

这就是說**向量加法满足結合律**。关于三个以上的向量之和可以同样地說明。

其次，为了要說明向量 $\boldsymbol{A}$ 与向量 $\boldsymbol{B}$ 之差，让我們考査方程式

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}.$$

以有向綫段 $\overrightarrow{OA}$ 表示向量 $\boldsymbol{A}$，有向綫段 $\overrightarrow{OB}$ 表示向量 $\boldsymbol{B}$，从右图看出

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA},$$

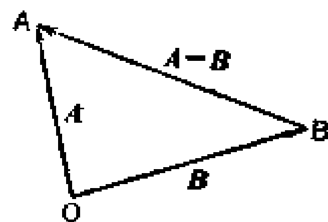


图 2.4

因此，有向綫段 $\overrightarrow{BA}$ 恰恰表示了向量 $\boldsymbol{X}$。除去与 $\overrightarrow{BA}$ 同长同向的有向綫段外，其他任何有向綫段不能代表满足上式的向量 $\boldsymbol{X}$。这就是說

(3) 满足方程 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}$ 的向量 $\boldsymbol{X}$ 只有一个。

这样的向量 $\boldsymbol{X}$ 称做**向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之差**，記以 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$。

在以上的說明中，如 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，则点 A 与点 B 将重合在一起。因此，向量 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 将由以同一点作起点又作終点的有向綫段来表示。这样的向量我們称之为**零向量**，以 $\boldsymbol{O}$ 来表示。从而对于任意向量 $\boldsymbol{A}$ 有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}.$$

还有，在方程 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}$ 里，以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，則

$$O=B+X,$$

表示向量 B 的有向綫段 $\overrightarrow{OB}$ 和代表向量 X 的有向綫段 $\overrightarrow{OB'}$ 利用向量加法的平行四边形法則把它們結合起来，要使結合后的有向綫段表示零向量 O，也就是說，要得出起点和終点一致的向量，就非得要 $\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OB'}$ 等長而反向不可。

对于向量 B 而言，和它等長而方向相反的向量記以 $-B$. 从此有

$$B+(-B)=(-B)+B=O.$$

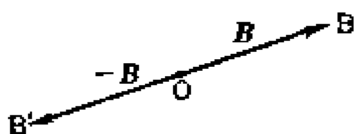


图　2.5

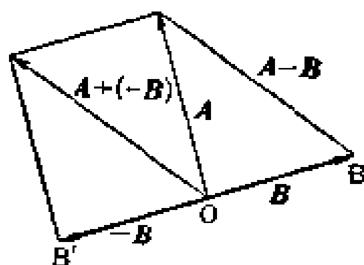


图　2.6

再說，两个向量 A 和 B 給出时，把 $A-B$ 的作图和图 2.6 比較，清楚地看出

$$A-B=A+(-B).$$

就向量加法 $A+B$ 而論，如 $A=B$，則得 $A+A$ 代表一个長是 A 的二倍、方向与 A 相同的一个向量。我們把这个向量記成 $A\times 2$ 或 $2A$.

更就一般情况讲，設 α 是一个实数，A 是一个向量，規定 $\alpha A=A\alpha$ 表示一个向量：当 α 是正数时，它的長是 A 的 α 倍，它的方向和 A 同向；当 α 是負数时，它的長是 A 的 $|\alpha|$ 倍，它的方向和 A 反向。从这个規定，立刻知道

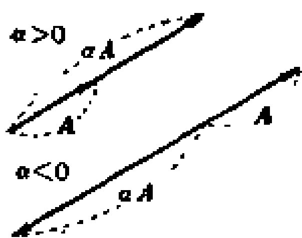


图　2.7

$$(-1)B=-B.$$

至于数量和向量的乘法满足以下三个法則，由下图当可明白。

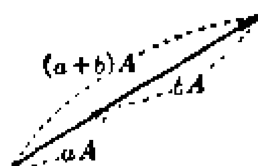


图 2.8

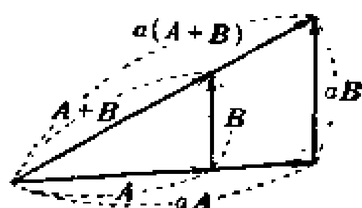


图 2.9

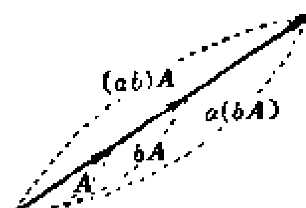


图 2.10

(4) $$(a+b)\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{A},$$

(5) $$a(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=a\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{B},$$

(6) $$a(b\boldsymbol{A})=(ab)\boldsymbol{A}.$$

§3 向量的綫性相关性与綫性无关性

一个向量 $\boldsymbol{A}$ 給出时，与之同向或反向的向量 $\boldsymbol{B}$ 可写为 $\boldsymbol{B}=l\boldsymbol{A}$。因此，以 $l=-\frac{a}{b}$，则

$$a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}. \tag{3.1}$$

这里 b 不等于零。一般講来，对于两个向量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，如有不同时为零的两个数 a，b 使上式成立，则称两向量**綫性相关**。对于任意向量 $\boldsymbol{A}$ 和零向量 $\boldsymbol{O}$，常有

$$0\boldsymbol{A}+1\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O},$$

所以任意向量 $\boldsymbol{A}$ 和零向量 $\boldsymbol{O}$ 总是綫性相关的。我們今后假定 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}\cdots$ 所表示的向量都不是零向量。

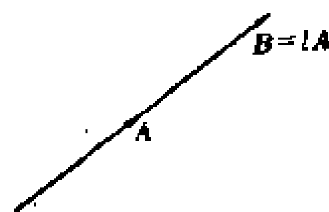


图 3.1

与向量 $\boldsymbol{A}$ 同向或反向的向量 $\boldsymbol{B}$ 既已看做是与 $\boldsymbol{A}$ 成綫性相关，反之，如 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是綫性相关，则(3.1)成立，因此 a 和 b 中至少有一个不是零，例如說 $b\neq 0$，这时，$\boldsymbol{B}=-\frac{a}{b}\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 是同向的或反向的。

如向量 $\boldsymbol{A}$ 和与它既非同向又非反向的向量 $\boldsymbol{B}$ 为已給，则如图 3.2 所表明的，要使式(3.1)成立，只有 $a=b=0$ 才行。象这样的

两个向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，式(3.1)要成立只限于 $a=b=0$，则称它們为**綫性无关**。

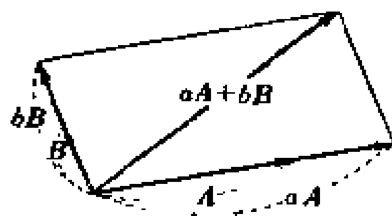


图　3.2

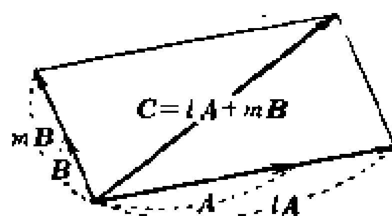


图　3.3

两个綫性无关的向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 决定一个平面。因此，如图3.3所表明的，对于平面上任意向量 $\boldsymbol{C}$，满足 $\boldsymbol{C}=l\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}$ 的 l, m 存在而且可唯一地决定。于是，如以 $l=-\frac{a}{c}$，$m=-\frac{b}{c}$，则

$$a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}. \tag{3.2}$$

这里 c 不等于零。一般讲来，对于三个向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$，如有不同时为零的三个数 a, b, c 使上式成立，称这三个向量为綫性相关。

从此可知，通过一点且在同一平面上的三个向量是綫性相关的。反之，如过一点引三个綫性相关的向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$，则(3.2)成立，$a, b, c$ 中至少有一个不是零。例如説 $c\neq 0$，那么，

$$\boldsymbol{C}=-\frac{a}{c}\boldsymbol{A}-\frac{b}{c}\boldsymbol{B},$$

于是 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 在同一平面上。

其次，过一点引三个向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$，如果它們不在同一平面上，则如图3.4所表明的，要使式(3.2)成立，只限于 $a=b=c=0$

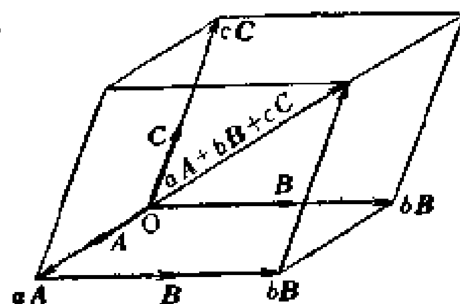


图　3.4

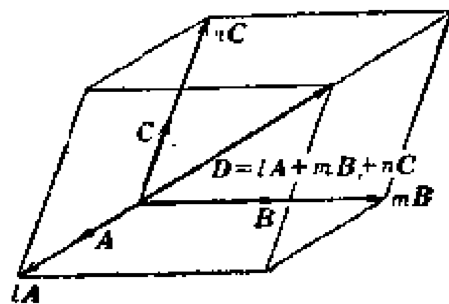


图　3.5

才成。象这样的三个向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$，只限于 $a=b=c=0$ 时式(3.2)成立，称它們为綫性无关。

过一点引三个綫性无关的向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$，那么，它們不会在同一平面上。因此，如图3.5所表示的，对于空間内任意向量 $\boldsymbol{D}$，满足 $\boldsymbol{D}=l\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}+n\boldsymbol{C}$ 的 l, m, n 存在而且可唯一地决定。于是，如以 $l=-\frac{a}{d}$，$m=-\frac{b}{d}$，$n=-\frac{c}{d}$，则

$$a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}+d\boldsymbol{D}=\boldsymbol{O}. \tag{3.3}$$

这里 d 不等于零。一般講来，对于四个向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$，如有不同时为零的四个数 a, b, c, d，使上式成立，則称这四个向量为綫性相关。

从此知道，空間内的任意四个向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 一定是綫性相关的。因为，如設 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 綫性相关，则有 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，这里的 a, b 不同时为零。于是

$$a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+0\boldsymbol{C}+0\boldsymbol{D}=\boldsymbol{O}$$

当然成立，这就是說 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 是綫性相关。又如 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 綫性相关，则必有不同时为零的 a, b, c 使 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$。于是

$$a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}+0\boldsymbol{D}=\boldsymbol{O}$$

当然成立，而 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 是綫性相关。最后設 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 是綫性无关，则由前面所讲的，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 必綫性相关。在这最后的情况下，式(3.3)的 $d\neq 0$。因为不然的話，a, b, c 中将有不为零的数使 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}+c\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$，这和 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 是綫性无关的假定不合，因此得到

$$\boldsymbol{D}=-\frac{a}{d}\boldsymbol{A}-\frac{b}{d}\boldsymbol{B}-\frac{c}{d}\boldsymbol{C}=l\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}+n\boldsymbol{C},$$

这时称 $\boldsymbol{D}$ 沿 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 的方向分解，并称 $l\boldsymbol{A}, m\boldsymbol{B}, n\boldsymbol{C}$ 为 $\boldsymbol{D}$ 在这三个方向的支量(或分量)。

§4 解析几何学上的应用

过空間一点 O，考虑三个互相直交的单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$。假定它們的安排是按照坐标系的右旋法则处理的。

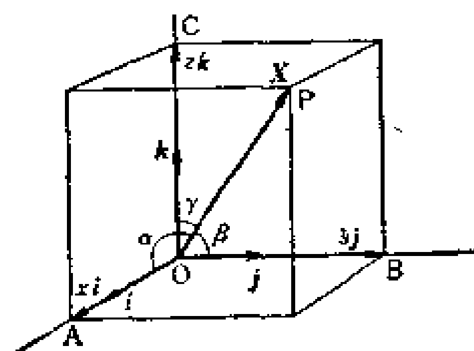


图 4.1

这样三个向量当然是綫性无关的。因此，过同一点 O 引任意向量 $\boldsymbol{X}$，它可写成

$$\boldsymbol{X}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

过向量 $\boldsymbol{X}$ 的終点 P 分别引平面平行于 $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$；$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}$；$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ 两两所决定的平面，設这些平面和向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 所定的直綫分别交于 A, B, C 三点，那么，x, y, z 的几何意义就是它們表示 OA, OB, OC（附适当正負号）的长度。

这样的 x, y, z 称为向量 $\boldsymbol{X}$ 关于直交单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的支量或坐标。

在空間解析几何学里，以一点 O 为原点，向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 所定的有向直綫分别作为 x 軸、y 軸、z 軸的正向，则一点 P 的直角坐标 (x, y, z) 就决定了。这种說法和以上的說法是完全一样的。

在設定直交軸 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的空間里，要决定一点 P 的位置，常用从原点引到点 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$，这个向量有时称为**位置向量**。位置向量的坐标就是它終点的坐标。設向量

$$\boldsymbol{X}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

之长是 r，它和向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 所成的角，即**方向角**分别記成 α, β, γ，那么，立刻知道

$$x=r\cos\alpha, \quad y=r\cos\beta, \quad z=r\cos\gamma.$$

这里的 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{X}$ 的**方向余弦**。因为

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

所以方向余弦满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 如写成

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k},$$

则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(A_x+B_x)\boldsymbol{i}+(A_y+B_y)\boldsymbol{j}+(A_z+B_z)\boldsymbol{k}$$

$$a\boldsymbol{A}=aA_x\boldsymbol{i}+aA_y\boldsymbol{j}+aA_z\boldsymbol{k},$$

因此，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的坐标是 (A_x, A_y, A_z), (B_x, B_y, B_z) 时，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的坐标就是 $(A_x+B_x, A_y+B_y, A_z+B_z)$，$a\boldsymbol{A}$ 的坐标就是 (aA_x, aA_y, aA_z)。

第2章　内积与外积

§5 向量的内积

給定两向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，如它們的长分别为 a, b，所成的角为 θ，則称 $ab\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的**内积**或**数量积**，普通用 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 或 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 来表示。因此，

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=ab\cos\theta.$$

設表示向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的有向綫段分别是 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$，从 A 引 OB 之垂綫，垂足記以 A'，从 B 引 OA 之垂綫，垂足記以 B'，則因

$$OA'=a\cos\theta,\quad OB'=b\cos\theta,$$

所以可以得到

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=OA'\cdot b \text{ 与 } \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=OB'\cdot a.$$

这就是說两个向量的内积可以当做是一个向量的长与另一向量在它上面的垂直射影所成的乘积。

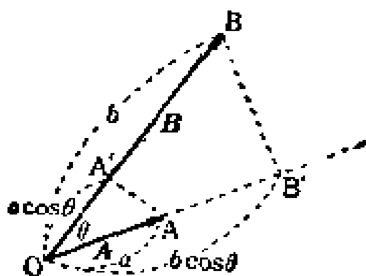


图 5.1

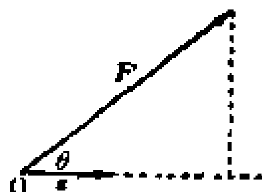


图 5.2

例　以力 F 施于一質点 O，引起了变位 s，則此力所作的功是 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$。

一向量 $\boldsymbol{A}$ 和它自身所成的内积，因 $\theta=0$, $\cos\theta=1$，故得到 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=a^2$. 因此，向量 $\boldsymbol{A}$ 之长由

$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$$

給出。

再如 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 互相垂直时，則因 $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\cos\theta=0$, 得到

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0.$$

反之，如 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都不是零向量，且 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，則 $\cos\theta=0$，从而 $\theta=\frac{\pi}{2}$，亦卽 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 直交。

由于以上的事实，对于三个互相直交的单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$，显然有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1, \quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0.$$

§6 向量內积的分配法則

給出三个向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, 以点 O 为起点引表示向量 $\boldsymbol{A}$ 的有向綫段 $\overrightarrow{OA}$，其次，以点 A 为起点引表示向量 $\boldsymbol{B}$ 的有向綫段 $\overrightarrow{AB}$，則向量 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可用有向綫段 $\overrightarrow{OB}$ 来表示。从点 A 与点 B 引直綫垂直于表示向量 $\boldsymbol{C}$ 的有向綫段 $\overrightarrow{OC}$，其垂足分别記以 A', B'，則

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=OB'\cdot OC.$$

另一方面有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=OA'\cdot OC, \quad \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=A'B'\cdot OC,$$

于是得出

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=(OA'+A'B')\cdot OC$$
$$=OB'\cdot OC.$$

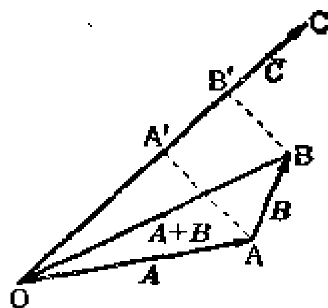


图 6.1

由以上两式就得到

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}.$$

这說明向量的內积满足分配律。

两向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 关于三个互相直交的单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分解成

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k},$$

这时，

$$a=|\boldsymbol{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2},\ b=|B|=\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2},$$

而且

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z.$$

从此，两向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 所成的角 θ 由

$$\cos\theta=\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}$$

給出，向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的直交条件为

$$A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=0.$$

§7 向量的外积

两个向量$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$給定后，如果有第三个向量，它的长度在数值上等于以 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形的面积，它的方向垂直于 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 且和它們組成如右旋坐标系的方向，則称这一向量为向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的外积或向量积，通常用 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 或 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$ 表示。

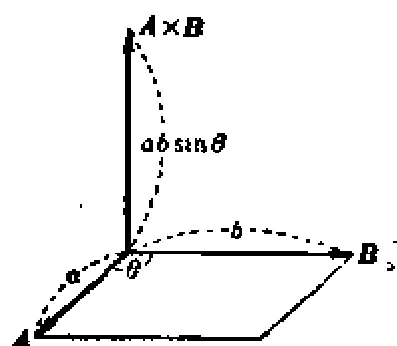


图 7.1

根据这一规定，如 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的长分别为 a, b, 它們所成的角为 θ, 沿 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 之方向的单位向量記以 $\boldsymbol{e}$, 則

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(ab\sin\theta)\boldsymbol{e}.$$

向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的内积和它們的順序无关，即 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$; 与此相反，向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的外积是和它們的順序有关系的。从外积的定义，就知道向量 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 和向量 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ 的长度相等，方向相反。因此，

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}.$$

例 1 施于一点 P 的力 $\boldsymbol{F}$ 关于一点 O 的力矩 $\boldsymbol{M}$, 如以 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{X}$, 則

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{F}.$$

例 2 某个剛体繞一个軸以一定角速度 ω 回轉，这时在軸上以 ω 为长度，右旋螺紋的前进方向为方向的向量記以 $\boldsymbol{\omega}$. 在向量 $\boldsymbol{\omega}$ 上取一点 O, 剛体上任

意一点 P 的速度設为 $\boldsymbol{v}$, 以 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{X}$, 則

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{X}.$$

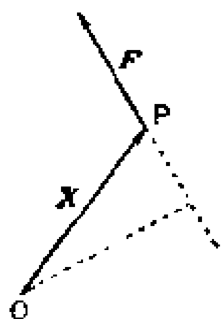


图 7.2

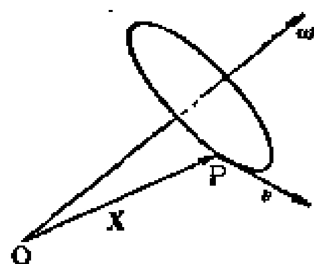


图 7.3

如果向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同向或反向的,則因 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$, 所以

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O},$$

不消說

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}.$$

反之，如两向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都不是零向量而且 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$, 則 $\sin\theta=0$, 从而 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$, 因此,向量 $\boldsymbol{A}$ 和向量 $\boldsymbol{B}$ 平行。

根据上面所說，对于三个互成直交的单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, 当然会有

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{O},$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}.$$

§8 向量外积的分配法則

我們已經知道向量的內积适合分配律

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}.$$

向量的外积也适合分配律

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}.$$

以下就来証明它。

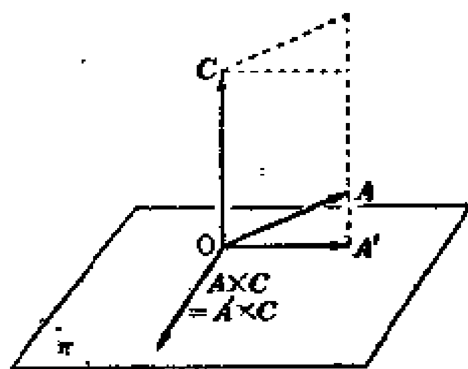


图 8.1

首先我們提出一桩值得注意的事情。外积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$ 是以 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}$ 所成平行四边形之面积为長，垂直于 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}$ 且

和它們形成如右旋坐标系的方向为方向的向量。因此，如通过起点O作垂直于向量$\boldsymbol{C}$的平面π，則向量$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$在平面$\pi$內。

向量$\boldsymbol{A}$在平面π上的垂直射影記以$\boldsymbol{A}'$，則$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$所成的平行四边形面积等于$\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{C}$所成的長方形面积，而且$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{C}$的旋轉方向和$\boldsymbol{A}'\to\boldsymbol{C}$的旋轉方向相同。因此，

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}'\times\boldsymbol{C}.$$

同样，如向量$\boldsymbol{B}$在平面π上的垂直射影是$\boldsymbol{B}'$的話，則

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}'\times\boldsymbol{C}.$$

另一方面，因为向量$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$在平面$\pi$上的垂直射影是$\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}'$，根据上面同样的理由，有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}')\times\boldsymbol{C}.$$

因此，要証明

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C},$$

只要証明

$$(\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}')\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}'\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}'\times\boldsymbol{C}$$

就好了。这就是說，在向量$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$同时垂直于向量$\boldsymbol{C}$的情况下能够証明公式成立就好了。

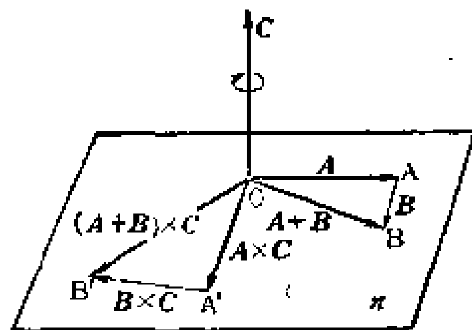


图 8.2

通过一点O引有向綫段表示$\boldsymbol{C}$，然后在点O作这条有向綫段的垂直平面π。以O为起点引有向綫段$\overrightarrow{OA}$表示向量$\boldsymbol{A}$，更以A为起点引有向綫段$\overrightarrow{AB}$表示向量$\boldsymbol{B}$，則有向綫段$\overrightarrow{OB}$表示向量$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$。这些向量$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$都在平面$\pi$上。

設向量$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$之長分別是a, b, c。因为向量$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$和向量$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$中的每一个都垂直，所以它在平面π內而且以$a\cdot c$为其長。因此，要由向量$\boldsymbol{A}$作出向量$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$，只要把$\boldsymbol{A}$圍着向量$\boldsymbol{C}$回繞(沿着图 8.2 中箭头所指方向)一个直角，再把它的長c倍起来

就行了。同样，要由向量 $\boldsymbol{B}$ 作出向量 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$，只要把 $\boldsymbol{B}$ 圍着向量 $\boldsymbol{C}$ 回繞（沿着图中箭头所指方向）一个直角，再把它的长 c 倍起来就好了。

因此，以向量 $\boldsymbol{C}$ 为軸把 $\triangle OAB$ 回繞（沿图中箭头所指方向）一个直角，然后以点 O 为中心相似地扩大（或縮小）c 倍就得到 $\triangle OA'B'$，这时有向綫段 $\overrightarrow{OA'}$ 表示向量 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$，有向綫段 $\overrightarrow{A'B'}$ 表示向量 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$，有向綫段 $\overrightarrow{OB'}$ 表示了向量 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$。由于

$$\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B'},$$

所以有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C},$$

这就証明了所要証明的关系。

当两向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分别关于三个互为直交的单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分解成

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}$$

时，則

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\times(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}).$$

根据 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 两两所成的外积公式以及外积的分配法則，得到

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}.$$

如利用行列式符号，則上式可改写成

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}.$$

例 1 施于点 P 之力 $\boldsymbol{F}$ 关于点 O 之力矩 $\boldsymbol{M}$，如以 $\overrightarrow{OP}=\mathbf{X}$，則

$$\boldsymbol{M}=\mathbf{X}\times\boldsymbol{F}.$$

如果力 $\boldsymbol{F}$ 是几个力的合力，即

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots$$

則

$$\mathbf{X}\times\boldsymbol{F}=\mathbf{X}\times(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots)=\mathbf{X}\times\boldsymbol{F}_1+\mathbf{X}\times\boldsymbol{F}_2+\cdots.$$

这就是說，合力关于一点 O 之力矩等于其各个分力关于点 O 的力矩之和。这也意味着力矩服从向量加法的平行四边形法则。

例 2　剛体以角速度 ω 繞軸旋轉，如在軸上取一点 O，記 $\overrightarrow{OP}=\mathbf{X}$，則剛体上任意一点 P 的速度 $\boldsymbol{v}$ 可用 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{X}$ 表出[見§7，例 2]。如一个剛体繞着过同一点 O 的好几个軸旋轉，其角速度分別为 $\omega_1, \omega_2, \cdots$。那么，这个剛体上一点 P 因这些旋轉而引起的速度由

$$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{X}, \quad \boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{X}, \cdots$$

給出。因此点 P 之速度 $\boldsymbol{v}$ 由下式表达出

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\cdots=\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{X}+\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{X}+\cdots=(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2+\cdots)\times\mathbf{X}.$$

如以

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2+\cdots$$

則

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{X}.$$

亦即，点 P 之速度等于剛体以角速度 ω 旋轉时所生之速度。这意味着角速度向量 ω 服从向量加法的平行四边形法则。

第3章 向量代数的一些公式

§9 数量三重积

通过一点O分别引有向綫段$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$表示向量$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$, 向量$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$之长等于以$OB, OC$为邻边之平行四边形$OBDC$的面积，它的方向垂直于$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$且和它們組成如右旋坐标系，以有向綫段$\overrightarrow{OP}$表示它。

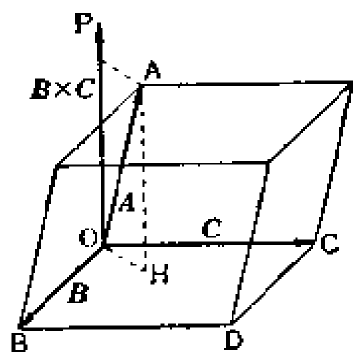


图 9.1

因此，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$等于$\overrightarrow{OA}$在$\overrightarrow{OP}$上的垂直射影之长，亦即从$A$引到平面$OBC$之垂綫长$AH$ ($\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$所成的角成銳角时它是正的，成直角时是0，成鈍角时是負的)，和平行四边形$OBDC$之面积的乘积。

这就是說，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$等于以$OA$, OB, OC为相邻三边之平行六面体的体积，这个量当$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$成銳角时为正，成直角时为0，成鈍角时为負。

向量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$成銳角时，我們称三向量$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$成正向；成鈍角时，称它們成負向。

容易知道：如三向量$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$成正向时，則$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$也成正向；如三向量$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$成負向时，則$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$也成負向。

利用这种說法，如三向量$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$成正向时，則$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$等于正的平行六面体体积；如三向量成負向时，則它等于負的平行六面体体积，这个平行六面体是以$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$为三个相邻的棱組

成的。

从以上所說的，立刻得到

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$
$$=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}$$

以及

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}).$$

如改写一下，以

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=[\boldsymbol{ABC}],$$

则$[\boldsymbol{ABC}]$有如下性質：

(1) $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$成正向时，$[\boldsymbol{ABC}]>0$；負向时，$[\boldsymbol{ABC}]<0$.

(2) 三向量$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$循环代换时，$[\boldsymbol{ABC}]$不变。

(3) 三向量$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$中任意两个交换时，$[\boldsymbol{ABC}]$的符号改变。

設三向量$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$关于互为直交的单位向量$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$分解为

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{C}=C_x\boldsymbol{i}+C_y\boldsymbol{j}+C_z\boldsymbol{k},$$

则因

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=(B_yC_z-B_zC_y)\boldsymbol{i}+(B_zC_x-B_xC_z)\boldsymbol{j}+(B_xC_y-B_yC_x)\boldsymbol{k},$$

而有

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=A_x(B_yC_z-B_zC_y)+A_y(B_zC_x-B_xC_z)$$
$$+A_z(B_xC_y-B_yC_x),$$

从而得出

$$[\boldsymbol{ABC}]=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

从这里更容易推得

$$[ABC]^2=[ABC][ABC]=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} A_x^2+A_y^2+A_z^2 & A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z & A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z \\ B_xA_x+B_yA_y+B_zA_z & B_x^2+B_y^2+B_z^2 & B_xC_x+B_yC_y+B_zC_z \\ C_xA_x+C_yA_y+C_zA_z & C_xB_x+C_yB_y+C_zB_z & C_x^2+C_y^2+C_z^2 \end{vmatrix},$$

因而有

$$[ABC]^2=\begin{vmatrix} (A\cdot A) & (A\cdot B) & (A\cdot C) \\ (B\cdot A) & (B\cdot B) & (B\cdot C) \\ (C\cdot A) & (C\cdot B) & (C\cdot C) \end{vmatrix}.$$

由几何意义知道，过一点 O 引有向綫段 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 表示向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 时，这些綫段在同一平面上的条件是

$$[ABC]=0.$$

这也是三个向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 成綫性相关的条件。

§10 向量三重积

我們将証明对于三个任意的向量 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, 成立公式

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{AC})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{BC})\boldsymbol{A}. \tag{10.1}$$

这个公式固然可以用和前节类似的几何方法导出，但在这里将利用坐标来証明。

把向量写成

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{C}=C_x\boldsymbol{i}+C_y\boldsymbol{j}+C_z\boldsymbol{k},$$

則因

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k},$$

故有

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=&[(A_zB_x-A_xB_z)C_z-(A_xB_y-A_yB_x)C_y]\boldsymbol{i}\\
&+[(A_xB_y-A_yB_x)C_x-(A_yB_z-A_zB_y)C_z]\boldsymbol{j}\\
&+[(A_yB_z-A_zB_y)C_y-(A_zB_x-A_xB_z)C_x]\boldsymbol{k}\\
=&(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k})\\
&-(B_xC_x+B_yC_y+B_zC_z)(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}).
\end{aligned}
$$

这就証明了(10.1)。

由(10.1)得出

$$\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{CB})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{CA})\boldsymbol{B},$$

在这里用 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, 分别代替 $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 则

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{AC})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}.$$

更在(10.1)内以 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 替换 $\boldsymbol{C}$ 时,就有

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\{\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\}\boldsymbol{B}-\{\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\}\boldsymbol{A},$$

但因

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=[\boldsymbol{ABC}],\ \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=0,$$

所以又得出

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=[\boldsymbol{ABC}]\boldsymbol{B}.$$

§11 向量三重系

現設 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 是三个綫性无关的正向向量, $\boldsymbol{v}$ 是任意的向量,則 $\boldsymbol{v}$ 定可写做

$$\boldsymbol{v}=v^1\boldsymbol{e}_1+v^2\boldsymbol{e}_2+v^3\boldsymbol{e}_3.$$

这里, v^1, v^2, v^3 并不表示 v 的1次,2次,3次冪,而是 $\boldsymbol{v}$ 的第一、第二、第三支量。今后我們用注在上角或下角的記号来表示数碼。

上式用"Σ"号可写成

$$\boldsymbol{v}=\sum_{\kappa=1}^{3}v^\kappa\boldsymbol{e}_\kappa.$$

今后我們还可省去符号 $\sum_{\varkappa=1}^{3}$，簡写成

$$\boldsymbol{v}=v^{\varkappa}\boldsymbol{e}_{\varkappa}.$$

这就是說，$\varkappa, \lambda, \mu, \cdots$ 等希腊字母可取数值 1, 2, 3, 如果同一指标在一項内两回出現的話，那就把这个指标分别写成 1, 2, 3, 把这些項加在一起表示总和。这項規定有时称为 **Einstein 規約**。

当向量 $\boldsymbol{v}$ 写成上面的形式时，它的长 v 由

$$(v)^2=(v^{\lambda}\boldsymbol{e}_{\lambda})(v^{\varkappa}\boldsymbol{e}_{\varkappa})=(\boldsymbol{e}_{\lambda}\boldsymbol{e}_{\varkappa})v^{\lambda}v^{\varkappa}$$

給出。因此，如以

$$\boldsymbol{e}_{\lambda}\cdot\boldsymbol{e}_{\varkappa}=g_{\lambda\varkappa}(=g_{\varkappa\lambda}),$$

則向量 $\boldsymbol{v}$ 之长 v 可写成

$$(v)^2=g_{\lambda\varkappa}v^{\lambda}v^{\varkappa}.$$

两个向量

$$\boldsymbol{v}=v^{\lambda}\boldsymbol{e}_{\lambda}, \qquad \boldsymbol{w}=w^{\varkappa}\boldsymbol{e}_{\varkappa}$$

所成之角 θ 由

$$\cos\theta=\frac{g_{\lambda\varkappa}v^{\lambda}w^{\varkappa}}{\sqrt{g_{\lambda\varkappa}v^{\lambda}v^{\varkappa}}\sqrt{g_{\lambda\varkappa}w^{\lambda}w^{\varkappa}}}$$

給出。这里的 $g_{\lambda\varkappa}v^{\lambda}v^{\varkappa}$ 是 $\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\varkappa=1}^{3}$ 之省略写法，实际上，它表示

$$\begin{aligned}g_{\lambda\varkappa}v^{\lambda}v^{\varkappa}=&g_{11}v^1v^1+g_{12}v^1v^2+g_{13}v^1v^3\\&+g_{21}v^2v^1+g_{22}v^2v^2+g_{23}v^2v^3\\&+g_{31}v^3v^1+g_{32}v^3v^2+g_{33}v^3v^3.\end{aligned}$$

因为这个式是所謂正値二次形式，所以由 $g_{\lambda\varkappa}$ 所作的行列式 g 应当是

$$g=\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}>0.$$

但因

$$[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3]^2=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3)\\(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3)\\(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3)\end{vmatrix}=g,$$

如更注意到 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 是正向的，则

$$[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3]=\sqrt{g}.$$

让我們考虑对称矩陣

$$g_{\lambda\varkappa}=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12} & g_{13}\\g_{21} & g_{22} & g_{23}\\g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{pmatrix}$$

的逆矩陣，它的元素以

$$g^{\lambda\varkappa}=\begin{pmatrix}g^{11} & g^{12} & g^{13}\\g^{21} & g^{22} & g^{23}\\g^{31} & g^{32} & g^{33}\end{pmatrix}$$

表示。則由逆矩陣的性質，有 $g^{\lambda\varkappa}=g^{\varkappa\lambda}$, 以及

$$g_{\mu\lambda}g^{\lambda\varkappa}=\delta^{\varkappa}_{\mu}.$$

这里的 $\delta^{\varkappa}_{\mu}$ 是一个記号，当 $\varkappa=\mu$ 时是 1，当 $\varkappa\neq\mu$ 时是 0，称为 **Kronecker δ**.

利用这个 $g^{\lambda\varkappa}$ 規定

$$\boldsymbol{e}^{\varkappa}=g^{\varkappa\lambda}\boldsymbol{e}_{\lambda},$$

从而有

$$\boldsymbol{e}_{\lambda}=g_{\lambda\varkappa}\boldsymbol{e}^{\varkappa},$$

于是由

$$\boldsymbol{e}^{\varkappa}\boldsymbol{e}_{\mu}=(g^{\varkappa\lambda}\boldsymbol{e}_{\lambda})\boldsymbol{e}_{\mu}=g^{\varkappa\lambda}(\boldsymbol{e}_{\lambda}\boldsymbol{e}_{\mu})=g^{\varkappa\lambda}g_{\lambda\mu},$$

得到

$$\boldsymbol{e}^{\varkappa}\boldsymbol{e}_{\mu}=\delta^{\varkappa}_{\mu}. \tag{11.1}$$

还有

$$\boldsymbol{e}^{\lambda}\boldsymbol{e}^{\varkappa}=(g^{\lambda\rho}\boldsymbol{e}_{\rho})(g^{\varkappa\sigma}\boldsymbol{e}_{\sigma})=g^{\lambda\rho}g^{\varkappa\sigma}(\boldsymbol{e}_{\rho}\boldsymbol{e}_{\sigma})=g^{\lambda\rho}g^{\varkappa\sigma}g_{\rho\sigma}=g^{\lambda\rho}\delta^{\varkappa}_{\rho}=g^{\lambda\varkappa},$$

亦即

$$e^{\lambda}e^{\varkappa}=g^{\lambda\varkappa}.$$

我們称 e_1, e_2, e_3 为**向量三重系**(triple), e^1, e^2, e^3 是向量的逆三重系。

从(11.1), 有 $e^1e_2=0$, $e^1e_3=0$, 因此, e^1 和 e_2 以及 e_3 都直交,于是形式

$$e^1=\alpha(e_2\times e_3)$$

成立。以 e_1 和上式的两边分别組成內积,那么,利用(11.1),左边成为1, 于是有

$$1=\alpha e_1\cdot(e_2\times e_3)=\alpha[e_1e_2e_3]=\alpha\sqrt{g},$$

因此, $\alpha=\frac{1}{\sqrt{g}}$。从这里就得到

$$e^1=\frac{1}{\sqrt{g}}(e_2\times e_3).$$

完全同样地可証明

$$e^2=\frac{1}{\sqrt{g}}(e_3\times e_1),\quad e^3=\frac{1}{\sqrt{g}}(e_1\times e_2).$$

利用这样的三重系,任意向量 v 写成 $v=v^1e_1+v^2e_2+v^3e_3$ 时,它的支量 v^1, v^2, v^3 可以容易地求出。作

$$v=v^{\varkappa}e_{\varkappa}=v^1e_1+v^2e_2+v^3e_3$$

和 e^1, e^2, e^3 的內积,則

$$v\cdot e^1=v^1,\quad v\cdot e^2=v^2,\quad v\cdot e^3=v^3.$$

再如以

$$ve_{\lambda}=v_{\lambda},$$

則

$$v_{\lambda}=v\cdot e_{\lambda}=(v^{\varkappa}e_{\varkappa})e_{\lambda}=v^{\varkappa}(e_{\varkappa}\cdot e_{\lambda})=v^{\varkappa}g_{\varkappa\lambda},$$

亦即

$$v_{\lambda}=v^{\varkappa}g_{\varkappa\lambda}.$$

§12 三重系的变换

由一个成正向的三重系 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 作方程

$$\boldsymbol{e}_{1'}=A_{1'}^{1}\boldsymbol{e}_1+A_{1'}^{2}\boldsymbol{e}_2+A_{1'}^{3}\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{e}_{2'}=A_{2'}^{1}\boldsymbol{e}_1+A_{2'}^{2}\boldsymbol{e}_2+A_{2'}^{3}\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{e}_{3'}=A_{3'}^{1}\boldsymbol{e}_1+A_{3'}^{2}\boldsymbol{e}_2+A_{3'}^{3}\boldsymbol{e}_3,$$

亦即

$$\boldsymbol{e}_{\lambda'}=A_{\lambda'}^{\lambda}\boldsymbol{e}_\lambda, \tag{12.1}$$

从此規定三个新的向量 $\boldsymbol{e}_{\lambda'}$，这时，$\boldsymbol{e}_{1'}$，$\boldsymbol{e}_{2'}$，$\boldsymbol{e}_{3'}$ 仍成为三重系的必要充分条件是

$$\Delta=|A_{\lambda'}^{\lambda}|>0.$$

这只要从 $[\boldsymbol{e}_{1'}\boldsymbol{e}_{2'}\boldsymbol{e}_{3'}]=\Delta[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3]$ 就立刻知道的。

現設 $A_{\lambda'}^{\lambda}$ 滿足这个条件，矩陣 $(A_{\lambda'}^{\lambda})$ 的逆矩陣写成 $(A_{\varkappa}^{\varkappa'})$，則

$$A_{\varkappa}^{\varkappa'}A_{\lambda'}^{\varkappa}=\delta_{\lambda'}^{\varkappa'}, \quad A_{\lambda}^{\lambda'}A_{\lambda'}^{\varkappa}=\delta_{\lambda}^{\varkappa}.$$

因此，由 $\boldsymbol{e}_{\lambda'}=A_{\lambda'}^{\lambda}\boldsymbol{e}_\lambda$ 解出 $\boldsymbol{e}_\lambda$，可得出

$$\boldsymbol{e}_\lambda=A_{\lambda}^{\lambda'}\boldsymbol{e}_{\lambda'}. \tag{12.2}$$

現設某一个向量 $\boldsymbol{v}$ 关于三重系 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 表示为

$$\boldsymbol{v}=v^{\varkappa}\boldsymbol{e}_{\varkappa}=v^1\boldsymbol{e}_1+v^2\boldsymbol{e}_2+v^3\boldsymbol{e}_3,$$

关于另一个三重系 $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$, $\boldsymbol{e}_{3'}$ 表示为

$$\boldsymbol{v}=v^{\varkappa'}\boldsymbol{e}_{\varkappa'}=v^{1'}\boldsymbol{e}_{1'}+v^{2'}\boldsymbol{e}_{2'}+v^{3'}\boldsymbol{e}_{3'}.$$

这时，有

$$v^{\varkappa'}\boldsymbol{e}_{\varkappa'}=v^{\varkappa}\boldsymbol{e}_{\varkappa},$$

在这式的右边，$\boldsymbol{e}_{\varkappa}$ 以 $\boldsymbol{e}_{\varkappa}=A_{\varkappa}^{\varkappa'}\boldsymbol{e}_{\varkappa'}$ 代入，則

$$v^{\varkappa'}\boldsymbol{e}_{\varkappa'}=v^{\varkappa}A_{\varkappa}^{\varkappa'}\boldsymbol{e}_{\varkappa'},$$

再注意到 $\boldsymbol{e}_{\varkappa'}$ 是綫性无关的这桩事实，就得到

$$v^{\varkappa'}=A_{\varkappa}^{\varkappa'}v^{\varkappa}.$$

这个式子告訴我們，向量 $\boldsymbol{v}$ 的支量 $v^{\varkappa}$ 受到和三重系之变换(12.1)

相逆的变换。因此，我們称 $v^{\varkappa}$ 是向量 $\boldsymbol{v}$ 关于三重系 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的逆变支量。

其次以

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_{\lambda}=v_{\lambda}, \quad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_{\lambda'}=v_{\lambda'},$$

試求 v_{λ} 和 $v_{\lambda'}$ 之关系。作 $\boldsymbol{e}_{\lambda'}=A_{\lambda'}^{\lambda}\boldsymbol{e}_{\lambda}$ 的两边和向量 $\boldsymbol{v}$ 的內积，立刻得到

$$v_{\lambda'}=A_{\lambda'}^{\lambda}v_{\lambda}.$$

这个式子告訴我們，v_{λ} 受到和三重系 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 之变换 (12.1) 相同的变换。因此，我們称 v_{λ} 是向量 $\boldsymbol{v}$ 的协变支量。

再試求与三重系 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 有关，它們所規定的

$$g_{\lambda\varkappa}=\boldsymbol{e}_{\lambda}\cdot\boldsymbol{e}_{\varkappa}$$

的变换法則。以

$$g_{\lambda'\varkappa'}=\boldsymbol{e}_{\lambda'}\cdot\boldsymbol{e}_{\varkappa'},$$

在这式的右边以 $\boldsymbol{e}_{\lambda'}=A_{\lambda'}^{\lambda}\boldsymbol{e}_{\lambda}$, $\boldsymbol{e}_{\varkappa'}=A_{\varkappa'}^{\varkappa}\boldsymbol{e}_{\varkappa}$ 代入时，則

$$g_{\lambda'\varkappa'}=\boldsymbol{e}_{\lambda'}\cdot\boldsymbol{e}_{\varkappa'}=(A_{\lambda'}^{\lambda}\boldsymbol{e}_{\lambda})(A_{\varkappa'}^{\varkappa}\boldsymbol{e}_{\varkappa})=A_{\lambda'}^{\lambda}A_{\varkappa'}^{\varkappa}(\boldsymbol{e}_{\lambda}\boldsymbol{e}_{\varkappa}),$$

而有

$$g_{\lambda'\varkappa'}=A_{\lambda'}^{\lambda}A_{\varkappa'}^{\varkappa}g_{\lambda\varkappa}.$$

§13 張　量

例如有关于三重系 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的量 $T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$ 以及关于三重系 $\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'}$ 的量 $T_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\varkappa'}$，当两个三重系之間以

$$\boldsymbol{e}_{\lambda'}=A_{\lambda'}^{\lambda}\boldsymbol{e}_{\lambda}, \quad \boldsymbol{e}_{\lambda}=A_{\lambda}^{\lambda'}\boldsymbol{e}_{\lambda'}$$

結合时，$T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$ 和 $T_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\varkappa'}$ 以

$$T_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\varkappa'}=A_{\mu'}^{\mu}A_{\lambda'}^{\lambda}A_{\varkappa}^{\varkappa'}T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$$

結合起来，这时以 $T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$ 和 $T_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\varkappa'}$ 所表示的量称为**逆变 1 阶、协变 2 阶的張量** (tensor of contravariant valence 1 and covariant valence 2)，称 $T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$, $T_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\varkappa'}$ 为这个張量关于三重系的支量。**逆变 p**

阶、协变 q 阶的張量可以同样地规定。

逆变 p 阶、协变 0 阶的張量称为**逆变張量** (contravariant tensor)，逆变 0 阶、协变 q 阶的張量称为**协变張量** (covariant tensor)。逆变 0 阶、协变 0 阶的張量是数量，逆变 1 阶、协变 0 阶的張量是逆变向量，逆变 0 阶、协变 1 阶的張量是协变向量。

以上我們遇着的例子有 $v^{\varkappa}$ 是逆变向量的支量，v_{λ} 是协变向量的支量，$g_{\lambda\varkappa}$ 是协变張量的支量。$g_{\mu\lambda}$ 又特别称为**度量張量**。

以下要說明張量的代数运算。

(1) 同类的張量，例如說，$R_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$ 与 $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$ 之对应支量相加而成的 $R_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}+S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}=T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$，则由于 $R_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$ 之变換式 $R_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\varkappa'}=A_{\mu'}^{\mu}A_{\lambda'}^{\lambda}A_{\varkappa}^{\varkappa'}R_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$ 和 $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$ 之变換式 $S_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\varkappa'}=A_{\mu'}^{\mu}A_{\lambda'}^{\lambda}A_{\varkappa}^{\varkappa'}S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$ 相加而得

$$R_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\varkappa'}+S_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\varkappa'}=A_{\mu'}^{\mu}A_{\lambda'}^{\lambda}A_{\varkappa}^{\varkappa'}(R_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}+S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}),$$

亦即 $T_{\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\varkappa'}=A_{\mu'}^{\mu}A_{\lambda'}^{\lambda}A_{\varkappa}^{\varkappa'}T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$，是和前两个同类的張量之支量，这个張量称为前两个張量之和。

(2) 同类的張量，例如說，$R_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$ 与 $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$ 的对应支量之差 $R_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}-S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}=T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$ 仍是同类張量的支量，这个張量称为前两个張量之差。

(3) 两个向量，例如說 $R_{\nu\mu}$ 与 $S_{\lambda}^{\cdot\varkappa}$ 之支量相乘而得的

$$R_{\nu\mu}S_{\lambda}^{\cdot\varkappa}=T_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa},$$

则由于 $R_{\nu\mu}$ 之变換式 $R_{\nu'\mu'}=A_{\nu'}^{\nu}A_{\mu'}^{\mu}R_{\nu\mu}$ 和 $S_{\lambda}^{\cdot\varkappa}$ 之变換式

$$S_{\lambda'}^{\cdot\varkappa'}=A_{\lambda'}^{\lambda}A_{\varkappa}^{\varkappa'}S_{\lambda}^{\cdot\varkappa}$$

相乘而得 $R_{\nu'\mu'}S_{\lambda'}^{\cdot\varkappa'}=A_{\nu'}^{\nu}A_{\mu'}^{\mu}A_{\lambda'}^{\lambda}A_{\varkappa}^{\varkappa'}R_{\nu\mu}S_{\lambda}^{\cdot\varkappa}$，亦即

$$T_{\nu'\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa'}=A_{\nu'}^{\nu}A_{\mu'}^{\mu}A_{\lambda'}^{\lambda}A_{\varkappa}^{\varkappa'}T_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa},$$

是一个張量的支量，这个張量称为前两張量之积。

(4) 一个張量，例如說 $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$ 給定时，使它的一个逆变指标等于一个协变指标，按照规定，应就这个指标分别取 1, 2, 3 时的量加在一起而成的量 $R_{\sigma\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\sigma}$，由于在 $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$ 的变換式

$$R_{\nu'\mu'\lambda'}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa'}=A_{\nu'}^{\nu}A_{\mu'}^{\mu}A_{\lambda'}^{\lambda}A_{\varkappa}^{\varkappa'}R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$$

里以 $\nu'=\varkappa'$，从而加在一起得到 $R_{\sigma'\mu'\lambda'}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\sigma'}=A_{\mu'}^{\mu}A_{\lambda'}^{\lambda}R_{\sigma\mu\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\sigma}$ 的原故，所以它是一个張量的支量，它比原張量的阶数减少 2，这項运算称为張量的**縮約**（或短縮）(contraction)。

現設有一个量 $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\varkappa}$，还未判定它是不是一个張量的支量，如果有已知的任意向量，例如說 $S^{\mu\lambda}$，和它相乘以后再經縮約手續所得的 $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\varkappa}S^{\mu\lambda}$ 是一个張量的話，則可斷定 $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\varkappa}$ 是一个張量的支量。为什么呢？因为 $S^{\mu\lambda}$ 和 $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\varkappa}S^{\mu\lambda}$ 是張量的支量，从它們的变換式 $S^{\mu'\lambda'}=A_{\mu}^{\mu'}A_{\lambda}^{\lambda'}S^{\mu\lambda}$，$R_{\nu'\mu'\lambda'}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\varkappa'}S^{\mu'\lambda'}=A_{\nu'}^{\nu}A_{\varkappa}^{\varkappa'}R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\varkappa}S^{\mu\lambda}$ 卽知 $R_{\nu'\mu'\lambda'}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\varkappa'}A_{\mu}^{\mu'}A_{\lambda}^{\lambda'}S^{\mu\lambda}=A_{\nu'}^{\nu}A_{\varkappa}^{\varkappa'}R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\varkappa}S^{\mu\lambda}$，因此，根据 $S^{\mu\lambda}$ 的任意性就有

$$R_{\nu'\mu'\lambda'}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\varkappa'}A_{\mu}^{\mu'}A_{\lambda}^{\lambda'}=A_{\nu'}^{\nu}A_{\varkappa}^{\varkappa'}R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\varkappa},$$

从而得到 $R_{\nu'\mu'\lambda'}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\varkappa'}=A_{\nu'}^{\nu}A_{\mu'}^{\mu}A_{\lambda'}^{\lambda}A_{\varkappa}^{\varkappa'}R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\varkappa}$ 的原故。这桩事实叫作張量的**商法則**(quotient law of tensor)。

在三維 Euclid 空間里，如指定了向量的三重系，則对于这三重系以 $g_{\mu\lambda}$ 为支量的度量張量就定出了。

現在来証明以前規定的 $g^{\lambda\varkappa}$ 是一个逆变張量的支量。

向量 $\boldsymbol{v}$ 写成 $\boldsymbol{v}=v^{\varkappa}\boldsymbol{e}_{\varkappa}$ 的形式时，$v^{\varkappa}$ 是逆变向量的支量。如以 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_{\lambda}=v_{\lambda}$，則 v_{λ} 是协变向量的支量。这两者間常有关系

$$g^{\lambda\varkappa}v_{\lambda}=v^{\varkappa}.$$

因这里的 v_{λ} 是任意的协变向量，$v^{\varkappa}$ 为逆变向量，根据張量的商法則，推知 $g^{\lambda\varkappa}$ 是逆变張量的支量。

現設有張量 $T_{\mu\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\varkappa}$，由此利用張量乘法与縮約，作出

$$T_{\mu\lambda\varkappa}=T_{\mu\lambda}^{\cdot\,\cdot\,\rho}g_{\rho\varkappa},$$

$T_{\mu\lambda\varkappa}$ 仍是一个張量。象这样地利用 $g_{\lambda\varkappa}$ 或 $g^{\lambda\mu}$ 由一个張量移于另一个張量，称它們是**相伴的**(associate)。

因为任何相伴的張量常可看做是表示同一几何的或物理的对象，所以对象本身有时也叫做張量。

例如說，向量 $\boldsymbol{v}$ 这样一个对象，如用 $v^{\varkappa}$ 来表示它，則称为**逆变**

支量，如用 v_λ 表示它，则称为**协变支量**。

如某一張量的支量 $T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}$ 关于某一个三重系，满足条件

$$T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}=T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\kappa}\quad(T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}=-T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\kappa})$$

时，则同样的关系式关于任何的三重系也一定成立。这样的張量称做关于 μ 与 λ 是**对称的**(**反称的**)。对于所有的指标是对称的(反称的)張量叫做**对称張量**(**反称張量**)。

第2篇 向量分析

第4章 向量的微分

§14 向量的微分

假定一个向量 $\boldsymbol{A}$ 随着一个数量参数，例如时間 t 的变化而变化，也就是說假定向量 $\boldsymbol{A}$ 是一个数量参数 t 的函数。对于这样的事实，我們以記号 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)$ 来表示。

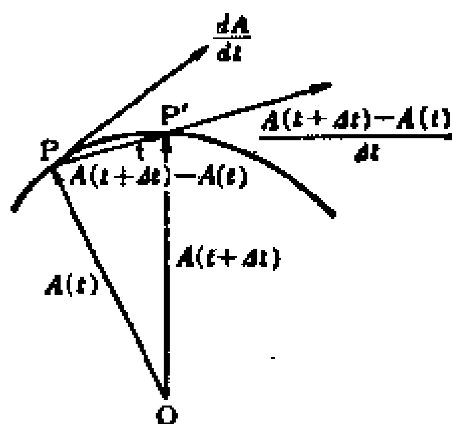


图 14.1

現設以一个定点 O 为起点，引有向綫段 $\overrightarrow{OP}$ 表示向量 $\boldsymbol{A}(t)$，因 $\boldsymbol{A}(t)$ 随着 t 的变化而变化，所以表示它的有向綫段 $\overrightarrow{OP}$ 的終点 P，其位置也因 t 的变化而变化，点 P 描繪出一条空間曲綫。

設参数值是 t 时，表示向量 $\boldsymbol{A}(t)$ 的有向綫段是 $\overrightarrow{OP}$，参数值是 $t+\Delta t$ 时，表示向量 $\boldsymbol{A}(t+\Delta t)$ 的有向綫段是 $\overrightarrow{OP'}$，向量 $\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)$ 可用有向綫段 $\overrightarrow{PP'}$ 来表示。因此，后一向量以 Δt 去除$\left(\text{即以 } \frac{1}{\Delta t} \text{ 去乘}\right)$所得到的向量

$$\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}$$

可用 $\overrightarrow{PP'}$ 之 $\frac{1}{\Delta t}$ 倍的有向綫段表示。

設当 Δt 无限地接近于0时，上一向量无限地接近于一个以 P

为起点的某一定有向綫段所表示的向量，这个极限位置的向量称为向量 $\boldsymbol{A}(t)$ 关于 t 的导向量，以 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}$ 或 $\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}$ 表示。也就是

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}.$$

如果 $\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}$ 仍是 t 的函数，这种极限手續継續进行的話，那么，可以定义 $\frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)=\frac{d^2\boldsymbol{A}}{dt^2}$. 同样，也可以定义 $\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2\boldsymbol{A}}{dt^2}\right)=\frac{d^3\boldsymbol{A}}{dt^3}$，…. 并分别称做是 $\boldsymbol{A}$ 的第1次、第2次、第3次…导向量。如果 $\boldsymbol{A}$ 是和 t 无关的一个定向量，则很清楚地有 $\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=0$.

設向量 $\boldsymbol{A}(t)$ 关于一个三重系 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 以

$$\boldsymbol{A}(t)=A^1(t)\boldsymbol{e}_1+A^2(t)\boldsymbol{e}_2+A^3(t)\boldsymbol{e}_3$$

表示时，它的支量 $A^1(t)$, $A^2(t)$, $A^3(t)$ 一般地仍是 t 的函数。因此，

$$\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}=\frac{A^1(t+\Delta t)-A^1(t)}{\Delta t}\boldsymbol{e}_1+\frac{A^2(t+\Delta t)-A^2(t)}{\Delta t}\boldsymbol{e}_2+\frac{A^3(t+\Delta t)-A^3(t)}{\Delta t}\boldsymbol{e}_3,$$

在 $\Delta t\to 0$ 时的极限有

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{dA^1}{dt}\boldsymbol{e}_1+\frac{dA^2}{dt}\boldsymbol{e}_2+\frac{dA^3}{dt}\boldsymbol{e}_3,$$

亦即某一向量的导向量之支量等于該向量的支量之导数。

向量关于参数 t 的微分满足以下的公式：

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}+\frac{d}{dt}\boldsymbol{B},$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}-\frac{d}{dt}\boldsymbol{B},$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha\boldsymbol{A})=\frac{d\alpha}{dt}\boldsymbol{A}+\alpha\frac{d}{dt}\boldsymbol{A},$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}.$$

这些公式的証明完全和微积分学里的情况相同。

这就是說，有关于向量之和与差，数量与向量之积，向量之內积与外积等等的微分完全和普通微分学里关于函数和、差、积的微分一样，服从同样的法則。但应注意的是向量的外积和向量的順序有关，因此，在写以上公式中的最后一个时要当心不要把順序搞乱，这是很重要的。

§15 在空間曲綫論中的应用

設空間內給定一条曲綫，以其上的一个定点 P_0 为出发点，沿着曲綫按一定方向測得的弧长設为 s，則曲綫上点的位置，可以由 s 来确定。因此，在空間內确定一个定点 O，如以 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$，則 $\boldsymbol{r}$ 应为 s 的函数。这个函数用 $\boldsymbol{r}(s)$ 表示。如果利用以 O 为起点的三个互相直交的单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 来表示 $\boldsymbol{r}(s)$，則

$$\boldsymbol{r}(s)=x(s)\boldsymbol{i}+y(s)\boldsymbol{j}+z(s)\boldsymbol{k},$$

其中 x, y, z 仍是 s 的函数。

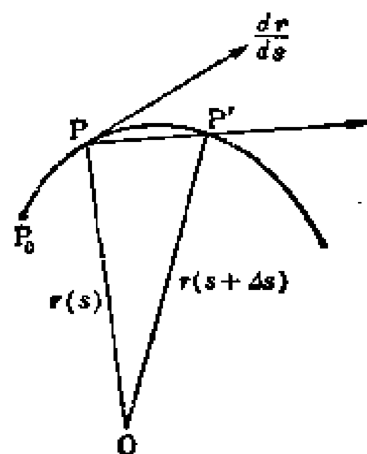


图 15.1

(1) 切綫与法平面 $\boldsymbol{r}(s)$ 关于 s 的导向量 $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$，由其定义

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)}{\Delta s}$$

就可知道它表示曲綫在点 P 的切綫。但因向量 $\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)$ 之长（即弦 PP' 之长）与 Δs（即弧 PP'）之长的比值，其极限为 1，所以上面的 $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ 是单位向量。因此，如命

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{t},$$

则 $\boldsymbol{t}$ 是点 P 处向着曲綫弧增加方向的单位向量。这样就知道切綫的方程可写成

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{r}+\alpha\boldsymbol{t}.$$

这里 $\boldsymbol{X}$ 是由原点 O 到这切綫上任意一点的位置向量，α 是参数，表示由点 P 到这一点的距离。

設 $\boldsymbol{X}$ 的支量为 X, Y, Z，将上式分解为支量表示，得

$$X=x+\alpha\frac{dx}{ds},\ Y=y+\alpha\frac{dy}{ds},\ Z=z+\alpha\frac{dz}{ds}.$$

因此，切綫的方程是

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{ds}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{ds}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{ds}}.$$

容易看出，在点 P 处垂直于切綫的平面即**法平面**，其向量方程是

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{r})=0.$$

以支量来表示则为

$$\frac{dx}{ds}(X-x)+\frac{dy}{ds}(Y-y)+\frac{dz}{ds}(Z-z)=0.$$

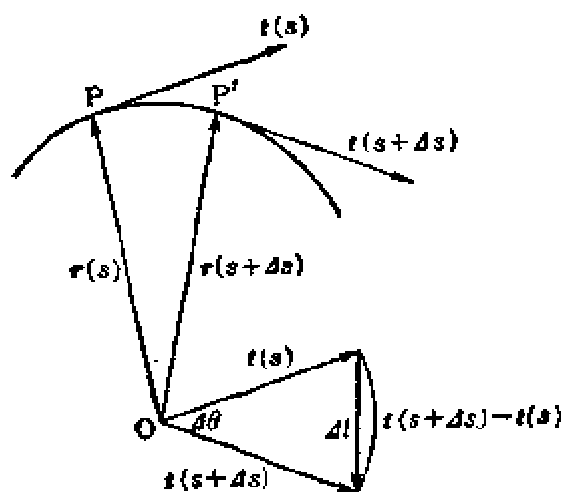


图 15.2

(2) **曲率与主法綫** 設曲綫上一点 $\boldsymbol{r}(s)$ 处的切綫 $\boldsymbol{t}(s)$ 和另一点 $\boldsymbol{r}(s+\Delta s)$ 处的切綫 $\boldsymbol{t}(s+\Delta s)$ 所成之角为 $\Delta\theta$，则在点 P 处，曲綫的**曲率**定义为

$$\varkappa=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|.$$

这就是說，曲綫上的点向前变动时，其对应切綫的回轉角与沿曲

綫前进的距离之比的极限，定义为曲綫在該点的曲率。

过空間内的原点引有向綫段分别表示向量 $\boldsymbol{t}(s)$ 及 $\boldsymbol{t}(s+\Delta s)$，設其所成的角記为 $\Delta\theta$，向量 $\boldsymbol{t}(s+\Delta s)-\boldsymbol{t}(s)$ 之长記为 Δl，則

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta l}{\Delta\theta}=1.$$

如注意到 $\dfrac{\boldsymbol{t}(s+\Delta s)-\boldsymbol{t}(s)}{\Delta s}$ 的长是 $\dfrac{\Delta l}{\Delta s}=\dfrac{\Delta l}{\Delta\theta}\,\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}$，就不难知道，向量

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{t}(s+\Delta s)-\boldsymbol{t}(s)}{\Delta s}=\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$$

的长等于

$$\left(\lim_{\Delta\theta\to 0}\left|\frac{\Delta l}{\Delta\theta}\right|\right)\left(\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|\right)=\varkappa.$$

因此

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\varkappa\cdot\boldsymbol{n},$$

$\boldsymbol{n}$ 是一个单位向量。但因 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}=1$ 关于 s 微分后得 $\boldsymbol{t}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}=0$，故知 $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 相互垂直。向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向我們称为曲綫在点 P 的**主法綫** (principal normal)。

过曲綫上一点 P，曲綫在点 P 的切綫与主法綫的平面称为**密切平面** (osculating plane)。因此，密切平面的方程是

$$[\boldsymbol{X}-\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n}]=0,$$

或

$$\left[\boldsymbol{X}-\boldsymbol{r},\ \frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\ \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right]=0.$$

利用支量来写，則有

$$\varkappa^2=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2},$$

而密切平面的方程則是

$$\begin{vmatrix} X-x & \frac{dx}{ds} & \frac{d^2x}{ds^2} \\ Y-y & \frac{dy}{ds} & \frac{d^2y}{ds^2} \\ Z-z & \frac{dz}{ds} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix}=0.$$

(3) 撓率与副法綫 在曲綫上一点 P 的切綫向量設为 $\boldsymbol{t}$，主法綫向量設为 $\boldsymbol{n}$，則

$$\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}$$

是垂直于密切平面的向量，它的方向称为曲綫在一点 P 的**副法綫**(binormal)。

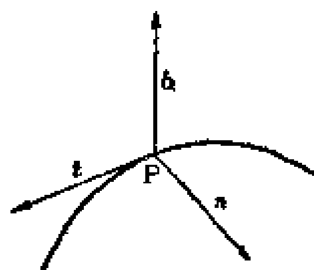


图 15.3

設曲綫上一点 $\boldsymbol{r}(s)$ 处的密切平面和另一点 $\boldsymbol{r}(s+\Delta s)$ 处的密切平面所成的角为 $\Delta\varphi$，亦即 $\boldsymbol{b}(s)$ 与 $\boldsymbol{b}(s+\Delta s)$ 所成的角为 $\Delta\varphi$，我們把这条曲綫在一点的**撓率**(torsion)定义为

$$\tau=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

这就是說，当点在曲綫上变动时，其对应密切平面的回轉角与点在曲綫上前进的距离之比的极限定义为曲綫在一点的撓率。

和以前一样，可以証明向量 $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ 之长等于 $|\tau|$. 但因

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{d}{ds}(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n})=\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\times\boldsymbol{n}+\boldsymbol{t}\times\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\boldsymbol{t}\times\frac{d\boldsymbol{n}}{ds},$$

所以 $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ 垂直于 $\boldsymbol{t}$. 更由于 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=1$ 經微分后得 $\boldsymbol{b}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=0$，所以 $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ 也垂直于 $\boldsymbol{b}$. 因此，$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$ 是指向 $\boldsymbol{n}$ 的方向的。在这里我們确定 τ 之符号使

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=-\tau\boldsymbol{n}$$

得以成立。

(4) Frenet-Serret 公式 我們已經对空間曲綫上一点 P 的三个向量，即切綫 $\boldsymbol{t}$，主法綫 $\boldsymbol{n}$，副法綫 $\boldsymbol{b}$ 給予定义。这时，主法綫和副法綫所决定的平面称做是**法平面**，切綫和主法綫所决定的平面称做是**密切平面**。切綫和副法綫所决定的平面称为**从切平面** (rectifying plane)。且

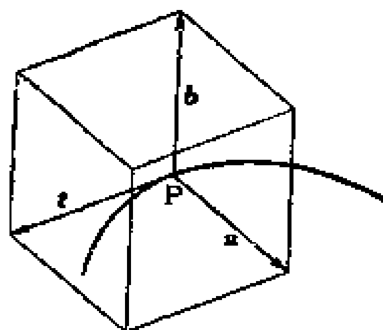


图 15.4

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\varkappa\boldsymbol{n},\quad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=-\tau\boldsymbol{n}.$$

今就 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t}$ 沿曲綫微分时，則得

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\times\boldsymbol{t}+\boldsymbol{b}\times\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=-\tau(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t})+\varkappa(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n})=\tau\boldsymbol{b}-\varkappa\boldsymbol{t}.$$

因此，我們得出公式

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}= & \varkappa\boldsymbol{n} \\ \dfrac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\varkappa\boldsymbol{t} & +\tau\boldsymbol{b} \\ \dfrac{d\boldsymbol{b}}{ds}= & -\tau\boldsymbol{n},\end{cases}$$

这些公式是空間曲綫論里最重要的 **Frenet-Serret 公式**。

§16 在运动学中的应用

一質点 P 在空間內运动时，在空間內取定一点 O，以 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$，則 $\boldsymbol{r}$ 是时間 t 的函数，用 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 来表示。

用以 O 为原点的三个互相直交的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 来表示 $\boldsymbol{r}$，則有

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

x,y,z 仍是 t 之函数。

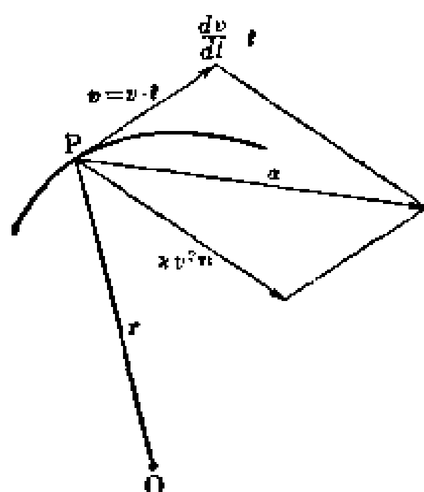


图　16.1

(1) 速度与加速度　如令 $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{v}$，则 $\boldsymbol{v}$ 是表示这个质点速度的向量。因为

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dt}\boldsymbol{t},$$

如速度的数量以 v 表示，则

$$\boldsymbol{v}=v\cdot\boldsymbol{t}.$$

其次，設以

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{a},$$

则 $\boldsymbol{a}$ 是表示这个质点的**加速度**向量。因此，有

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\cdot\boldsymbol{t}+v\frac{d\boldsymbol{t}}{dt}=\frac{dv}{dt}\cdot\boldsymbol{t}+v\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\frac{ds}{dt},$$

这样就得到

$$\boldsymbol{a}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{t}+\varkappa v^2\boldsymbol{n}.$$

这說明，质点的加速度向量沿軌道的切綫方向与主法綫方向分解时，其支量分别是 $\frac{dv}{dt}$ 与 $\varkappa v^2$.

(2) 速端曲綫　設某一质点的运动以 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 表示，在空間里确定一个定点 O'，引有向綫段

$$\overrightarrow{O'P'}=\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

则点 P' 的軌迹称为这个运动的**速端曲綫**(hodograph)。

对于在直綫上作等速运动的质点，因 $\boldsymbol{v}=$常数，故知其速端曲綫是一个定点 P'.

对于在直綫上作等加速度运动的质点，因 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0=$常数，

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}_0t+\boldsymbol{v}_0,$$

而且由于 $\boldsymbol{a}_0$ 和 $\boldsymbol{v}_0$ 有同一方向，故知其速端曲綫是和质点的軌道平行的一条曲綫。

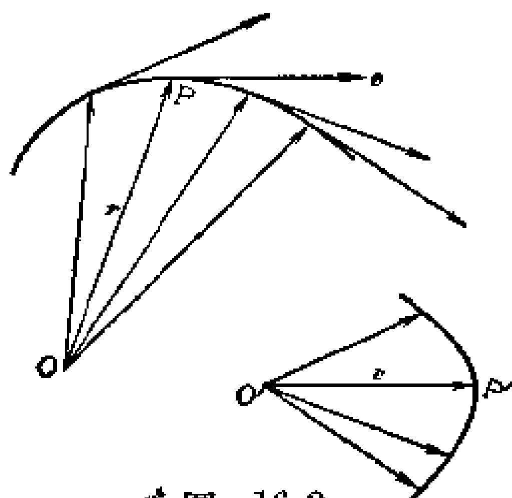


图 16.2

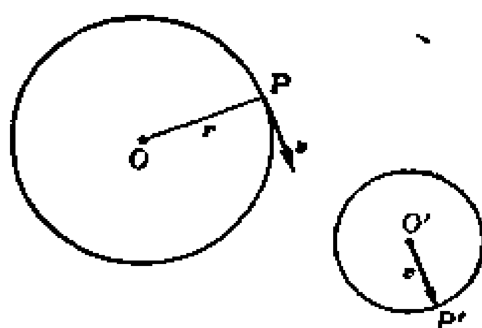


图 16.3

在圓周上作等速运动的質点，其速度向量在同一平面上且 $|\boldsymbol{v}|=$常数，故其速端曲綫仍是一个圓。这时，在上面的結果

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{t}+\varkappa v^2\boldsymbol{n}$$

里，因有 $v=$常数，$\varkappa=\dfrac{1}{r}$，所以

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{v^2}{r}\boldsymbol{n},$$

亦即 P' 的速度的大小是 $\dfrac{v^2}{r}$，这里的 r 为原来的圓半徑。

(3) 根据牛頓力学定律的質点运动 質点 P 相对于一个定点 O 受到和 OP 的平方成反比的力作用，我們現在就要研究这种运动。以 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}$，則上述定律可写成

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{k}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

或

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{k}{r^3}\boldsymbol{r}.$$

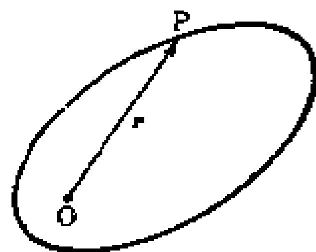


图 16.4

这里的 k 是比例常数，如果 k 是正值，則力为斥力，如 k 是負值，則为引力。

試由向量 $\boldsymbol{r}$ 和上式的两边組成外积，則

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=O,$$

因此，得到

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{a}_0=\text{常数}。\tag{16.1}$$

这个式子只要运动方程是如下形式

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=f(r)\boldsymbol{r}$$

时一定成立，这表示运动在垂直于 $\boldsymbol{a}_0$ 的平面内进行，动径 $\overrightarrow{OP}$ 在单位时間内描画出的面积等于定值。

如考虑 $\boldsymbol{r}$ 和(16.1)之两边所成的外积

$$\boldsymbol{r}\times\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}_0,$$

則

$$\left(\boldsymbol{r}\,\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r})\,\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}_0,$$

于是由于左边可写成

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{r}^2}{dt}\right)\boldsymbol{r}-r^2\,\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{dr^2}{dt}\right)\boldsymbol{r}-r^2\,\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

$$=r\left(\frac{dr}{dt}\,\boldsymbol{r}-r\,\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right),$$

就得到

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\times\boldsymbol{a}_0.$$

以外积形式在运动方程的两边乘以 $\boldsymbol{a}_0$，有

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\times\boldsymbol{a}_0=k\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\times\boldsymbol{a}_0\right),$$

用前式代进这个式子里，卽得

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\times\boldsymbol{a}_0=-k\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right),$$

两边积分后，得到

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{b}_0-\frac{k}{r}\boldsymbol{r}.$$

这里的 $\boldsymbol{b}_0$ 是垂直于 $\boldsymbol{a}_0$ 的一个定向量。

按外积形式以定向量 $\boldsymbol{a}_0$ 乘上式两边，所得的外积是

$$\boldsymbol{a}_0\times\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{a}_0\right)=\boldsymbol{a}_0\times\left(\boldsymbol{b}_0-\frac{k}{r}\boldsymbol{r}\right),$$

$$(\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{a}_0)\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}-\left(\boldsymbol{a}_0\,\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{a}_0\times\left(\boldsymbol{b}_0-\frac{k}{r}\boldsymbol{r}\right),$$

但因 $\boldsymbol{a}_0$ 和 $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 是直交的，所以得到

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{\boldsymbol{a}_0}{a_0^2}\times\left(\boldsymbol{b}_0-\frac{k}{r}\boldsymbol{r}\right).$$

以向量 $\boldsymbol{r}$ 和这个式子的两边組成外积

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\left\{\frac{\boldsymbol{a}_0}{a_0^2}\times\left(\boldsymbol{b}_0-\frac{k}{r}\boldsymbol{r}\right)\right\},$$

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\left(\boldsymbol{r},\,\boldsymbol{b}_0-\frac{k}{r}\boldsymbol{r}\right)\frac{\boldsymbol{a}_0}{a_0^2}-\frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}_0)}{a_0^2}\left(\boldsymbol{b}_0-\frac{k}{r}\boldsymbol{r}\right),$$

于是

$$\boldsymbol{a}_0=\frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{b}_0)}{a_0^2}\boldsymbol{a}_0-\frac{kr}{a_0^2}\boldsymbol{a}_0,$$

这样就得到

$$a_0^2=(\boldsymbol{r}\boldsymbol{b}_0)-kr.$$

因此，如向量 $\boldsymbol{b}_0$ 和 $\boldsymbol{r}$ 所成的角为 θ，则

$$a_0^2=rb_0\cos\theta-kr,$$

亦即

$$r=\frac{-\frac{a_0^2}{k}}{1-\frac{b_0}{k}\cos\theta}.$$

上式表示質点 P 画出一条以点 O 为焦点的圓錐曲綫。

第5章 微分运算子

§17 数量的梯度

在設定直交軸的空間內，設原点为 O，对于每一点 $P(x,y,z)$，有确定的一个数量

$$\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

这样，作为点的函数的数量分布在空間內，我們称这些个数量組成**数量場**(scalar field)。

今設 $f(x, y, z)$ 是一个数量場，使它等于定值的点的軌迹

$$f(x, y, z)=c$$

称为**等位面**(equipotential surface)。等温面、等压面、等电位面就是它的一些例子。

当給出一个数量場 $f(x, y, z)$ 时，以它关于 x, y, z 的偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

作为支量的向量称为数量 $f(x, y, z)$ 的**梯度向量**(gradient vector)，以 grad f 或 ∇f 来表示。如用向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 来写的話，则有

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

又因为它可写成

$$\nabla f=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)f,$$

这等于説 ∇f 是以

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

这样一个**向量运算子**施于 f 而得到的，或者把 ∇f 看成是这个向

量运算子与数量 f 之积。这样的向量运算子叫作 **Hamilton 运算子**(Hamiltonian)。

有时也用

$$\nabla_x f,\ \nabla_y f,\ \nabla_z f \text{ 或 } \mathrm{grad}_x f,\ \mathrm{grad}_y f,\ \mathrm{grad}_z f$$

等記号来表示 ∇f 在 x, y, z 軸上的支量。

容易驗証出 ∇ 具有如次的性質:

$$\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g,$$

$$\nabla(fg)=(\nabla f)g+f(\nabla g),$$

$$\nabla(f(u))=\frac{df}{du}\nabla u,$$

在最后一式里,f 是数量場 $u(x, y, z)$ 的函数。从 ∇ 的定义更清楚地知道

$$\nabla x=\boldsymbol{i},\quad \nabla y=\boldsymbol{j},\quad \nabla z=\boldsymbol{k}.$$

又因数量場的全微分可写成

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

所以 df 可以向量 ∇f 和向量 $d\boldsymbol{r}$ 的內积形式表示出,即

$$df=(\nabla f)\cdot d\boldsymbol{r}.$$

对于最初一个例的数量場

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

計算 ∇r 时,因

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

就得到

$$\nabla r=\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

因此,对于一般 r 的函数 $f(r)$ 有

$$\nabla f(r)=\frac{df}{dr}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

特别地，如 $f(r)=\frac{1}{r}$，则

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{17.1}$$

一般地說来，如对于空間各点分别确定对应的向量，这样一組向量就叫作**向量場**(vector field)。对于一个向量場 $\boldsymbol{A}$，其支量 A_x，A_y，A_z 一般是 x，y，z 的函数。如果对于一个向量場 $\boldsymbol{A}$，有使

$$\boldsymbol{A}=-\nabla f$$

成立的数量場 f 存在，则称 $\boldsymbol{A}$ 具有**位**(potential)，而称 f 为 $\boldsymbol{A}$ 的**位**，或**数量位**(scalar potential)。

例如，設在一点 C 有电荷 e，它对带单位正电荷的点 P 作用的力 $\boldsymbol{E}$ 可由

$$\boldsymbol{E}=\frac{e}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{e}{r^3}\boldsymbol{r}$$

給出。由(17.1)，有

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\left(\frac{e}{r}\right).$$

因此，如令 $\varphi=\frac{e}{r}$，则得到

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi.$$

在这里 φ 是电位，$\boldsymbol{E}$ 表示电場强度，$\boldsymbol{E}$ 具有位 φ。

現設一个数量場 $f(x, y, z)$ 和通过一点 P 的单位向量 $\boldsymbol{s}$ 为已給。在向量 $\boldsymbol{s}$ 上取一点 P'，使 $PP'=\Delta s$. 这时，在 P 处的 f 值为 f，在 P' 处的 f 值为 $f+\nabla f$，则

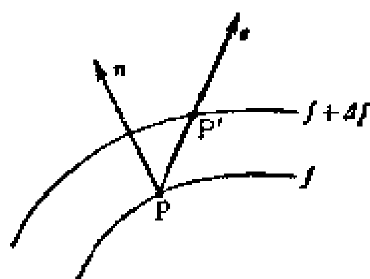


图 17.1

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta s}=\frac{\partial f}{\partial s}$$

称为在单位向量 $\boldsymbol{s}$ 方向上的数量 f 的**方向导数**(direction derivative)。設 $\boldsymbol{s}$ 的支量是 s_x，s_y，s_z，则由于

$$\frac{\Delta f}{\Delta s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s},$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}\to s_x,\ \frac{\Delta y}{\Delta s}\to s_y,\ \frac{\Delta z}{\Delta s}\to s_z,$$

即得到

$$\frac{\partial f}{\partial s}=s_x\frac{\partial f}{\partial x}+s_y\frac{\partial f}{\partial y}+s_z\frac{\partial f}{\partial z}.$$

更因为这个式子可写成

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\left(s_x\frac{\partial}{\partial x}+s_y\frac{\partial}{\partial y}+s_z\frac{\partial}{\partial z}\right)f,$$

若把右边看做是向量 $\boldsymbol{s}$ 和向量运算子 ∇ 所成的内积

$$\boldsymbol{s}\nabla=s_x\frac{\partial}{\partial x}+s_y\frac{\partial}{\partial y}+s_z\frac{\partial}{\partial z}$$

施加于 f 而得的结果时，则可写成

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\boldsymbol{s}\nabla f=(\boldsymbol{s}\cdot\nabla)f.$$

这里的 $\boldsymbol{s}\cdot\nabla$ 是一个数量运算子。

一般講来，即使向量 $\boldsymbol{v}$ 不是单位向量，仍可規定

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla=v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z},$$

而有

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla f=v_x\frac{\partial f}{\partial x}+v_y\frac{\partial f}{\partial y}+v_z\frac{\partial f}{\partial z}.$$

在前一例里，通过一点 P 的等位面 $f(x, y, z)=$常数，在該点的等位面之单位法綫設为 $\boldsymbol{n}$ 时，则

$$\boldsymbol{n}(\nabla f)=\frac{\partial f}{\partial n}.$$

$\boldsymbol{n}$ 和 ∇f 有同一方向，而且 $\boldsymbol{n}$ 是单位向量，所以 ∇f 之长为 $\frac{\partial f}{\partial n}$，方向为 $\boldsymbol{n}$，因此有

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial n}\boldsymbol{n}.$$

§18 向量的散度

对空間各点分别規定向量 $\boldsymbol{A}$ 时，这样一組向量，已如前述，称

为向量場，以 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ 表示。

向量場 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ 的支量 A_x, A_y, A_z 仍是 x, y, z 的函数。以式

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

表示的数量称为向量 $\boldsymbol{A}$ 的**散度**(divergence)，以 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ 来表示。上式又可写成

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})$$

$$=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

关于向量場 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ 的散度的意义說明如下。凡切綫方向总是朝着向量 $\boldsymbol{A}$ 的方向的曲綫，亦即满足关系式

$$\frac{dx}{A_x}=\frac{dy}{A_y}=\frac{dz}{A_z}$$

的曲綫称为向量場 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ 的**流綫**(stream line)。流綫表示出向量 $\boldsymbol{A}$ 的方向。为了要表示出向量的大小(或强度)，引流綫通过垂直于 $\boldsymbol{A}$ 的单位平面，令其数目等于向量 $\boldsymbol{A}$ 的长，即以通过这一单位面积上的流綫数(通量)来表示向量的强度。因此，通过任意单位平面的流綫数目等于 $\boldsymbol{A}$ 在这个平面的单位法綫上的垂直射影之长。

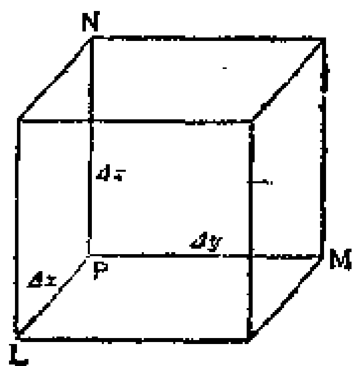


图 18.1

过空間一点 P 引平行于 x 軸、y 軸、z 軸的直綫，从 P 起在这些直綫上分别截取 Δx, Δy, Δz 等长度，其終点設为 L, M, N. 現在要計算出入于以 PL, PM, PN 为三条棱的正六面体的流綫数目。

首先，流进矩形 PMN 的流綫数等于 A 在 PL 上的垂直射影之长(即 A_x)和 PMN 之面积 $\Delta y\Delta z$ 的相乘积，即 $A_x\Delta y\Delta z$.

其次，对于与 PMN 相对之平面，流出的流綫数等于在 $A_x\Delta y\Delta z$ 内以 $A_x+\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x$ 代换 A_x 而得的

$$\left(A_x+\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z.$$

因此，从面 PMN 流进，再从其对面流出的流綫数是

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z.$$

完全同样，从面 PNL 流进，从其对面流出的流綫数是

$$\frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z,$$

从面 PLM 流进，从其对面流出的流綫数是

$$\frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z.$$

綜合以上結果，从正六面体各面流出的流綫数目等于

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z=(\mathrm{div}\boldsymbol{A})\,\Delta x\Delta y\Delta z.$$

因此，由单位体积中流出的流綫数就是以正六面体的体积 $\Delta x\Delta y\Delta z$ 去除上式所得的商，即 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$。如果 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ 是負值，則它所表示的就是流进单位体积的流綫数。

例如，設一点 O 載有电荷 e，在 O 的电場中，点 P 处的电場强度 $\boldsymbol{E}$ 为 $\boldsymbol{E}=\frac{e}{r^3}\boldsymbol{r}$，对于它有

$$E_x=e\frac{x}{r^3},\quad E_y=e\frac{y}{r^3},\quad E_z=e\frac{z}{r^3}.$$

因为

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

所以由

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=e\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5}\right),\quad \frac{\partial E_y}{\partial y}=e\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5}\right),$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z}=e\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}\right)$$

得出

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=e\left(\frac{3}{r^3}-\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}\right)=0.$$

由一个数量場 f 作它的梯度 ∇f，更作这个梯度 ∇f 的散度 $\nabla(\nabla f)=\nabla^2 f$，則得到由

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

所給定的数量。这里出現的运算子我們称之为 **Laplace 运算子**。因而偏微分方程

$$\nabla^2 f=0$$

叫做 Laplace 方程，滿足它的函数叫做**調和函数** (harmonic function)。

例如，对于 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，因为有

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5},$$

所以

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=0.$$

前举的向量 $\boldsymbol{E}$，因具有位

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\left(\frac{e}{r}\right),$$

故知

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=-\nabla\nabla\left(\frac{e}{r}\right)=-e\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=0.$$

如設 f 是一个数量，$\boldsymbol{A}$ 是一个向量，要計算 $\operatorname{div}(f\boldsymbol{A})$ 的話，則

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{A})=\frac{\partial fA_x}{\partial x}+\frac{\partial fA_y}{\partial y}+\frac{\partial fA_z}{\partial z}$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}A_x+\frac{\partial f}{\partial y}A_y+\frac{\partial f}{\partial z}A_z\right)+f\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right),$$

从而得出

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{A})=(\operatorname{grad} f)\cdot\boldsymbol{A}+f\operatorname{div}\boldsymbol{A}.$$

§19 向量的旋度

对于向量場 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$，以

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\quad \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\quad \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

作为支量的向量称为 $\boldsymbol{A}$ 的旋度(rotation)，以記号 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$(或 $\operatorname{curl}\boldsymbol{A}$)来表示。亦即，如

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k},$$

則

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

这个式子又可写成

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}.$$

$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ 之 x, y, z 支量有时也写为 $\operatorname{rot}_x\boldsymbol{A}$, $\operatorname{rot}_y\boldsymbol{A}$, $\operatorname{rot}_z\boldsymbol{A}$.

如用 Hamilton 运算子 $\nabla=\boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ 和向量 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$ 作成外积的形式

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A}&=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\\&=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

則有

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}.$$

对于两向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，旋度满足

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}+\operatorname{rot}\boldsymbol{B},$$

这从定义就可直接看出。对于一个数量 f 和一个向量 $\boldsymbol{A}$，試計算 $\mathrm{rot}(f\boldsymbol{A})$ 的 x 支量，則有

$$\mathrm{rot}_x f\boldsymbol{A}=\frac{\partial}{\partial y}(fA_z)-\frac{\partial}{\partial z}(fA_y)$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial y}A_z-\frac{\partial f}{\partial z}A_y\right)+f\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)$$

$$=(\nabla f\times\boldsymbol{A})_x+f\,\mathrm{rot}_x\boldsymbol{A}.$$

同样，有

$$\mathrm{rot}_y f\boldsymbol{A}=(\nabla f\times\boldsymbol{A})_y+f\,\mathrm{rot}_y\boldsymbol{A},$$

$$\mathrm{rot}_z f\boldsymbol{A}=(\nabla f\times\boldsymbol{A})_z+f\,\mathrm{rot}_z\boldsymbol{A}.$$

因此，最后得到

$$\mathrm{rot}(f\boldsymbol{A})=\nabla f\times\boldsymbol{A}+f\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}.$$

§20 关于梯度、散度、旋度的一些公式

本节証明几个关于向量的梯度、散度以及旋度的重要公式。

(1) $\mathrm{grad}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$.

为了証明这一式，让我們把它右边的 x 支量写下来，

$$\left(A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}\right)B_x$$

$$+\left(B_x\frac{\partial}{\partial x}+B_y\frac{\partial}{\partial y}+B_z\frac{\partial}{\partial z}\right)A_x$$

$$+\left[A_y\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)-A_z\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\right]$$

$$+\left[B_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-B_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z),$$

从此可以看出它和左边的 x 支量一致。同样可以証明两边的 y 支量、z 支量也是一致的。

(2) $\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$.

計算左边，有

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=&\frac{\partial}{\partial x}(A_yB_z-A_zB_y)+\frac{\partial}{\partial y}(A_zB_x-A_xB_z)\\
&+\frac{\partial}{\partial z}(A_xB_y-A_yB_x)\\
=&B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\\
&+B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\\
&-A_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)-A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\\
=&\boldsymbol{B}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}.
\end{aligned}
$$

(3) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\triangledown)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\triangledown)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\operatorname{div}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\operatorname{div}\boldsymbol{A}$.

計算右边的 x 支量，有

$$
\begin{aligned}
&\left(B_x\frac{\partial}{\partial x}+B_y\frac{\partial}{\partial y}+B_z\frac{\partial}{\partial z}\right)A_x-\left(A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}\right)B_x\\
&\qquad+A_x\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)-B_x\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\\
&=\frac{\partial}{\partial y}(A_xB_y-A_yB_x)-\frac{\partial}{\partial z}(A_zB_x-A_xB_z),
\end{aligned}
$$

它和左边的 x 支量一致。同样，两边的 y 支量、z 支量也可証明是一致的。

(4) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}f=\boldsymbol{O}$.

計算 x 支量，有

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0.$$

同样，y 支量与 z 支量也是 0.

(5) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=0$.

因为

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=0.$$

(6) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}.$

試計算 x 支量，則有

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right),$$

从这里看出两边的 x 支量是一致的。同样可証两边的 y 支量、z 支量也是一致的。

第6章 向量的积分

§21 綫积分

在空間里，設已給定了一个数量場$f(P)=f(x, y, z)$及連接两点A, B的曲綫C:

$$x=x(s), y=y(s), z=z(s)$$
$$(s_0 \leqslant s \leqslant s_1).$$

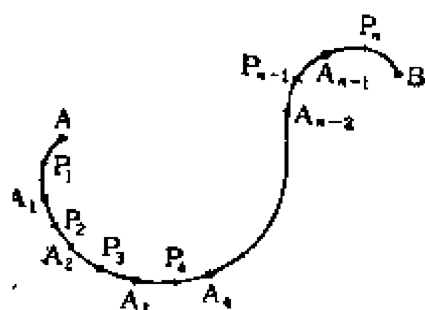


图 21.1

曲綫AB用点$A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$进行分割，設弧$AA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}B$的长各为$\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n$，在弧$AA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}B$上各取任意点$P_1, P_2, \cdots, P_n$，作

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i,$$

当$\Delta s_i \to 0$时，上式的极限就是我們所熟知的

$$\int_{s_0}^{s_1} f(x, y, z)ds.$$

这个积分称为$f(x, y, z)$沿曲綫C的**綫积分**。有时把它写成

$$\int_C f(x, y, z)ds.$$

当曲綫C是閉曲綫时，又常把它写成

$$\oint_C f(x, y, z)ds.$$

在上述情况下，向量$A_{i-1}A_i$的x, y, z支量分别記为$\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$，作

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta y_i, \quad \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta z_i,$$

取它們的极限，写做

$$\int_{AB} f(x, y, z)dx, \quad \int_{AB} f(x, y, z)dy, \quad \int_{AB} f(x, y, z)dz.$$

这些积分的每一个都叫做綫积分。設这条曲綫的切綫$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$之方向余弦为$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，則因

$$dx=\cos\alpha\, ds, \quad dy=\cos\beta\, ds, \quad dz=\cos\gamma\, ds,$$

以上几个积分又可写成

$$\int_{AB} f(x, y, z)\cos\alpha\, ds, \quad \int_{AB} f(x, y, z)\cos\beta\, ds,$$

$$\int_{AB} f(x, y, z)\cos\gamma\, ds,$$

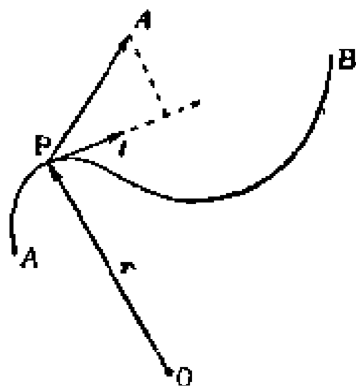


图　21.2

这些形式就是最初説明的綫积分。

設沿着曲綫 AB 給定了一个向量場 $\boldsymbol{A}$，則 $\boldsymbol{A}$ 和曲綫的切綫向量 $\boldsymbol{t}$ 組成的内积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}$ 确定出沿着曲綫的数量。因此，可以考慮它沿着 AB 的綫积分

$$\int_{AB} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}ds.$$

这个积分称为 $\boldsymbol{A}$ 沿着曲綫 AB 的**切綫綫积分**。以 $\boldsymbol{r}$ 表示从原点引向曲綫上一点 P 的向量，因

$$\boldsymbol{t}\cdot ds=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}ds=d\boldsymbol{r},$$

所以，上面的綫积分可写成

$$\int_{AB} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}ds=\int_{AB} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{AB}(A_x dx+A_y dy+A_z ds).$$

在上面这个式子內，如 $\boldsymbol{A}$ 表示力場，則上式表示了以力 $\boldsymbol{A}$ 使質点从 A 沿着曲綫移动到 B 所作的功。

如果 A 表示流体的速度，則上面的积分表示所謂环流量。

在上式內，如以 $\boldsymbol{A}=\nabla f$，則

$$\int_{AB}(\nabla f)d\boldsymbol{r}=\int_{AB}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)$$

$$=\int_{AB}df=f(B)-f(A).$$

例如，設电場为 $\boldsymbol{E}$，电位为 f，則

$$\int_{AB}\boldsymbol{E}d\boldsymbol{r}=-\int_{AB}(\nabla f)d\boldsymbol{r}=f(A)-f(B).$$

若曲綫是封閉的，則有

$$\oint(\nabla f)d\boldsymbol{r}=0.$$

如果由点 A 到点 B 有两条曲綫 C_1 与 C_2，則沿着 C_1 前进，然后沿着 C_2 回到原处，这样就形成一条閉曲綫，因而可利用上式得出

$$\int_{C_1}(\nabla f)d\boldsymbol{r}-\int_{C_2}(\nabla f)d\boldsymbol{r}=0,$$

$$\int_{C_1}(\nabla f)d\boldsymbol{r}=\int_{C_2}(\nabla f)d\boldsymbol{r}.$$

这說明由 A 至 B 的积分 $\int(\nabla f)d\boldsymbol{r}$ 与路綫的选擇无关。

§22 面 积 分

在空間里設有一个数量場 $f(P)=f(x, y, z)$ 及一个曲面 S。用曲綫网把 S 細分，每个小区域的面积記为 ΔS_i，在每个小区域里各取任意的点 P_i，作 $f(P_i)\Delta S_i$，再由这些个别的項組成总和

$$\sum_i f(P_i)dS_i,$$

則它的极限

$$\iint_S f(x, y, z)dS$$

称为 f 关于这个曲面的**面积分**。

在上述情况下，設 ΔS_i 在 yz，zx，xy 等坐标面上的垂直射影为 $\Delta y_i\Delta z_i$，$\Delta z_i\Delta x_i$，$\Delta x_i\Delta y_i$，把

$$\sum_i f(P_i)\,\Delta y_i\Delta z_i,\quad \sum_i f(P_i)\,\Delta z_i\Delta x_i,\quad \sum_i f(P_i)\,\Delta x_i\Delta y_i$$

的极限写成

$$\iint_S f(x,\ y,\ z)\,dy\,dz,\quad \iint_S f(x,\ y,\ z)\,dz\,dx,$$

$$\iint_S f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy,$$

这些积分仍称为面积分。設 ΔS 的法綫（随 S 的表里面来确定法綫的方向）之方向余弦分别为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$，則因

$$dy\,dz=\cos\alpha\,dS,\ dz\,dx=\cos\beta\,dS,\ dx\,dy=\cos\gamma\,dS,$$

上式可写成

$$\iint_S f(x,\ y,\ z)\cos\alpha\,dS,\quad \iint_S f(x,\ y,\ z)\cos\beta\,dS,$$

$$\iint_S f(x,\ y,\ z)\cos\gamma\,dS,$$

这些形式就是最初說明的面积分。

設对曲面上每个点，給定一个向量 $\boldsymbol{A}$，这个曲面的单位法綫記以 $\boldsymbol{n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 所成之内积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$ 是定义于曲面上的数量場。因此，可以考虑到它在 S 上的面积分

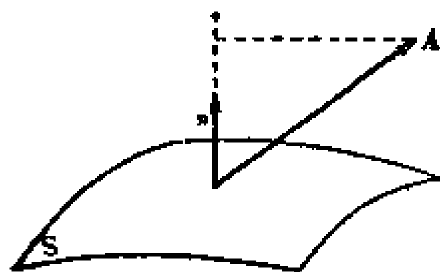


图 23.1

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS.$$

今設 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦是 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$，則有

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\iint_S (A_x\cos\alpha+A_y\cos\beta+A_z\cos\gamma)\,dS$$

$$=\iint_S (A_x\,dy\,dz+A_y\,dz\,dx+A_z\,dx\,dy).$$

上式內的 $\boldsymbol{A}$ 如果是流体速度，則上述积分表示在单位时間內通过 S 的流量。

§ 23 关于散度的定理

假設一个函数 $f(x, y, z)$ 和一个閉曲面 S 为已給，S 所包圍的立体部分記为 V，則

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_S f\,dx\,dy. \tag{23.1}$$

現在来証明这項結論。

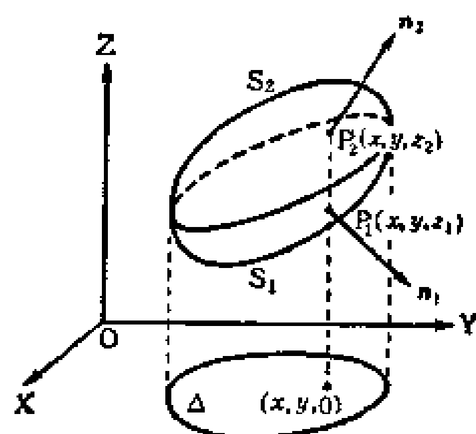


图 23.1

为了簡单起見，設平行于 z 軸的直綫与 S 的交点不超过两点。如果不是这样的話，則把 S 划分为若干个满足上述条件的部分卽可。

設 S 在 xy 平面上的垂直射影为 Δ，过 Δ 內一点 $(x, y, 0)$ 引平行于 z 軸的直綫自下而上地交 S 于两点 $P_1(x, y, z_1)$ 与 $P_2(x, y, z_2)$，把含 P_1 的部分記为 S_1，含 P_2 的那部分記为 S_2，則

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_\Delta [f(x, y, z)]_{z_1}^{z_2}\,dx\,dy$$

$$= \iint_\Delta [f(x, y, z_2) - f(x, y, z_1)]\,dx\,dy.$$

但因在 S_2 上，$dx\,dy$ 的符号不变，可是在 S_1 上，$dx\,dy$ 的符号就要改变，所以

$$\text{上式} = \iint_{S_2} f(x, y, z)\,dx\,dy + \iint_{S_1} f(x, y, z)\,dx\,dy$$

$$= \iint_S f(x, y, z)\,dx\,dy.$$

現設有一个向量場 $\boldsymbol{A}$，在前一式內以 $f = A_z$ 代进，則有

$$\iiint_V \frac{\partial A_z}{\partial z} dx\, dy\, dz = \iint_S A_z\, dx\, dy.$$

同样，有

$$\iiint_V \frac{\partial A_x}{\partial x} dx\, dy\, dz = \iint_S A_x\, dy\, dz,$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_y}{\partial y} dx\, dy\, dz = \iint_S A_y\, dz\, dx.$$

因此，把这些式子加在一起，就得出

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dx\, dy\, dz = \iint_S (A_x\, dy\, dz + A_y\, dz\, dx + A_z\, dx\, dy).$$

从这里又得到下面关于散度的定理。

散度定理 对于一个向量场 $\boldsymbol{A}$ 及闭曲面 S，有

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dV = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{23.2}$$

成立。

特别以 $\boldsymbol{A} = -\nabla f$ 时，则由于

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = -\nabla^2 f, \quad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} = -\frac{\partial f}{\partial n},$$

从上面的定理就有

$$\iiint_V \nabla^2 f dV = \iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dS. \tag{23.3}$$

和(23.1)同样，有

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial x} dx\, dy\, dz = \iint_S f\, dy\, dz \tag{23.4}$$

及

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial y} dx\, dy\, dz = \iint_S f\, dz\, dx. \tag{23.5}$$

这两个式子和(23.1)加在一起，又得出

$$\iiint_V \nabla f\, dV = \iint_S f \cdot \boldsymbol{n}\, dS. \tag{23.6}$$

在上式中以 $f=1$，則有

$$\iint_S \boldsymbol{n}\cdot dS=0. \tag{23.7}$$

如果在(23.5)內以 $f=A_z$，在(23.1)內以 $f=A_y$，則

$$\iiint_V \frac{\partial A_z}{\partial y}dx\,dy\,dz=\iint_S A_z\,dz\,dx,$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_y}{\partial z}dx\,dy\,dz=\iint_S A_y dx\,dy,$$

于是得

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint_S (A_z\,dz\,dx-A_y\,dx\,dy).$$

同样可得

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)dx\,dy\,dz=\iint_S (A_x\,dx\,dy-A_z\,dy\,dz),$$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)dx\,dy\,dz=\iint_S (A_y\,dy\,dz-A_x\,dz\,dx).$$

把这些式子加起来就可写成

$$\iiint_V \operatorname{rot}\boldsymbol{A}\,dV=\iint_S (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A})dS. \tag{23.8}$$

§ 24 Stokes 定理

如在平面上給定一个以閉曲綫 K 包圍的区域 Δ 和一个向量場 $\boldsymbol{A}$，則

$$\iint_\Delta \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)dS=\int_K (A_x\,dx+A_y\,dy), \tag{24.1}$$

在微积分学中已經学到过，这个关系称做是平面內的 **Stokes 定理**。現在把这个定理扩充到关于空間閉曲綫 C 所包圍的曲面 S 上去。

首先証明这样一桩事实：对于任意函数 $f(x, y, z)$，有

$$\int_C f\,dx=\iint_S\left(\frac{\partial f}{\partial z}\,dz\,dx-\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy\right).$$

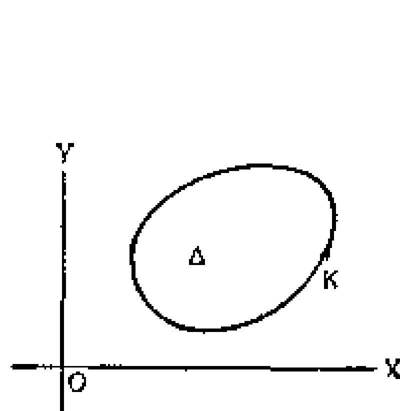


图 24.1

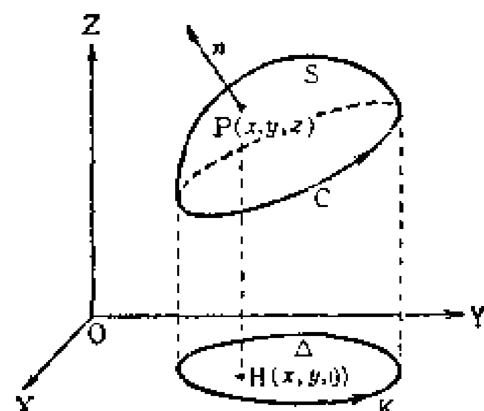


图 24.2

为簡单起見，設S和平行于z軸的直綫只交于一点。在这个交点P处S的法綫$\boldsymbol{n}$与z軸所成的角常假定是銳角。C与S在xy平面上的垂直射影分别以K与Δ表示，P在xy平面上的垂直射影以$H(x, y, 0)$表示。这样，曲面就可用单值函数

$$z=g(x, y)$$

表示。如以$F(x, y)=f(x, y, g(x, y))$，則

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

在(24.1)式内，如果引入以$A_x=F(x, y)$，$A_y=0$为支量的向量，則

$$-\iint_\Delta \frac{\partial F}{\partial y}dS'=\int_K F dx.$$

令

$$F=f, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}, \quad dS'=dx\,dy,$$

則得到

$$-\iint_S\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_C f\,dx.$$

但由于

$$dy\,dz:dz\,dx:dx\,dy=\frac{\partial z}{\partial x}:\frac{\partial z}{\partial y}:-1,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial y}\,dx\,dy = -dz\,dx.$$

因此，有

$$-\iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy - \frac{\partial f}{\partial z}\,dz\,dx\right) = \int_C f\,dx,$$

亦即

$$\int_C f\,dx = \iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy\right). \tag{24.2}$$

如果 $\boldsymbol{n}$ 与 z 軸所成的角是鈍角，則 dS' 的符号改变，因而 K 的方向也改变，上式照样成立。还有，当 S 和平行于 z 軸的直綫不只交于一点时，則把 S 划分成若干个满足以上假設的部分，仍可使式子成立。

同样可証

$$\int_C f\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy - \frac{\partial f}{\partial z}\,dy\,dz\right), \tag{24.3}$$

$$\int_C f\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,dy\,dz - \frac{\partial f}{\partial x}\,dz\,dx\right). \tag{24.4}$$

在这些式内分别設 $f = A_x,\ A_y,\ A_z$，則有

$$\int_C A_x\,dx = \iint_S \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial A_x}{\partial y}\,dx\,dy\right),$$

$$\int_C A_y\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\,dx\,dy - \frac{\partial A_y}{\partial z}\,dy\,dz\right),$$

$$\int_C A_z\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\,dy\,dz - \frac{\partial A_z}{\partial x}\,dz\,dx\right),$$

因此，得出

$$\int_C (A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz) = \iint_S \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dx\,dy\right],$$

亦即

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,ds=\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\,dS.$$

这就是 **Stokes 定理**。这定理的逆定理也成立,那就是:

定理 对于任意的閉曲綫 C 与其包圍的曲面 S, 如有

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,ds=\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}\,dS,$$

則

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}.$$

因为由 Stokes 定理

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,ds=\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\,dS$$

及假設,就有

$$\iint_S \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})dS=0,$$

由于S是任意的曲面,于是有

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})=0.$$

又因 $\boldsymbol{n}$ 也是任意的, $\boldsymbol{B}-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=0$, 即

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}.$$

在 Stokes 定理内,如 $\boldsymbol{A}=-\mathrm{grad}\,f$, 則由

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=-\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,f=0$$

而得

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,ds=\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\,dS=0.$$

还有,(24.2、3、4)也可合并写成

$$\int_C f\,d\boldsymbol{r}=\iint_S \boldsymbol{n}\times\nabla f\,dS.$$

在(24.3)里以 z 代替 f, (24.4)里以 y 代替 f, 然后由后者减去前者,即得

$$\int_C (ydz-zdy)=2\iint_S dy\,dz.$$

同样，有

$$\int_C (zdx-xdz)=2\iint_S dz\,dx,$$

$$\int_C (xdy-ydx)=2\iint_S dx\,dy,$$

把它們总和起来写，则有

$$\int_C \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r}=2\iint_S \boldsymbol{n}\cdot dS.$$

§25 Green 定理

設闭曲面 S 包圍的区域为 V，数量場 $f(x, y, z)$ 与 $g(x, y, z)$ 給定后，则有

$$\iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}\,dS=\iiint_V (f\nabla^2 g+(\nabla f)(\nabla g))dV \qquad (25.1)$$

成立。但法綫的方向假定是从 S 的內部朝向外部。

作向量 $f\cdot\nabla g$ 的散度

$$\operatorname{div}(f\cdot\nabla g)=f\nabla^2 g+(\nabla f)(\nabla g),$$

将上式在 V 上积分，则有

$$\iiint_V \operatorname{div}(f\cdot\nabla g)dV=\iiint_V (f\nabla^2 g+(\nabla f)(\nabla g))dV.$$

另一方面，由散度定理得

$$\iiint_V \operatorname{div}(f\cdot\nabla g)dV=\iint_S f\cdot\boldsymbol{n}\cdot\nabla g\,dS=\iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}dS.$$

比較上面二个式子就証明了(25.1)。式(25.1)称为 **Green 定理。**

在(25.1)内，交换 f 与 g 后，再就式子的两边相减，得到

$$\iint_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial f}{\partial n}\right)dS=\iiint_V (f\nabla^2 g-g\nabla^2 f)dV. \quad (25.2)$$

在(25.1)内，如以 $f=g$，则得

$$\iint_S f\frac{\partial f}{\partial n}\,dS=\iiint_V (f\nabla^2 f+(\nabla f)^2)\,dV. \tag{25.3}$$

在(25.1)内，如果 g 是调和函数，亦即 $\nabla^2 g=0$，则有

$$\iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}\,dS=\iiint_V (\nabla f)(\nabla g)\,dV. \tag{25.4}$$

在(25.2)内，如 f 和 g 都是调和函数，则得

$$\iint_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial f}{\partial n}\right)dS=0. \tag{25.5}$$

在(25.3)内，特别以 f 作为调和函数时，得到

$$\iint_S f\frac{\partial f}{\partial n}\,dS=\iiint_V (\nabla f)^2 dV.$$

第7章 曲綫坐标

§26 曲綫坐标

在已設定直交軸的空間內，設有三族曲面

$$F(x,y,z)=u^1,\quad G(x,y,z)=u^2,\quad H(x,y,z)=u^3, \quad (26.1)$$

假定在空間某一区域 D 內，当 u^1, u^2, u^3 之值被指定后，其对应的三个曲面只交于一点 P。亦即假定

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}\neq 0.$$

这时，三个数值 (u^1, u^2, u^3) 指定后，三个曲面 $F=u^1$, $G=u^2$, $H=u^3$ 就被确定，因而它們的交点 P 也被唯一地确定。

反之，在空間內取一点 P，它的直角坐标 (x, y, z) 就确定了，以它作为交点的三个曲面(26.1)內的 (u^1, u^2, u^3) 也就确定了。

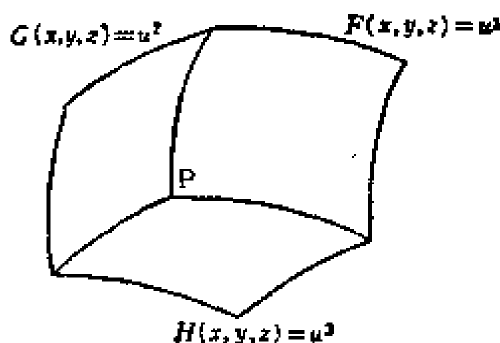


图 26.1

象这样，在区域 D 內点 P 和数組 (u^1, u^2, u^3) 成为1对1的对应，因此，可把 (u^1, u^2, u^3) 当作 P 的坐标。这项坐标叫做**曲綫坐标**。

这时，(26.1)关于 x, y, z 应当是可解的，解出后，就应当得出如次形式

$$x=f(u^1,u^2,u^3),\quad y=g(u^1,u^2,u^3),\quad z=h(u^1,u^2,u^3). \quad (26.2)$$

因此，当固定 u^2, u^3，只許 u^1 单独变化时，就得出一条曲綫，这叫做 **u^1-曲綫**。**u^2-曲綫**和 **u^3-曲綫**可以同样地定义。这些曲綫总

称做**坐标曲綫**。在直綫坐标系的情况下，坐标曲綫是直綫，至于曲綫坐标系，則坐标曲綫实际上是曲綫，这就是曲綫坐标这个名称的来源。

由 $F(x, y, z)=u^1=$定值，$G(x, y, z)=u^2=$定值，$H(x, y, z)=u^3=$定值所定义的曲面各称做 **u^1–曲面**、**u^2–曲面**、**u^3–曲面**，总称为**坐标曲面**。直綫坐标中，坐标曲面是平面；曲綫坐标中，坐标曲面实际上是曲面。

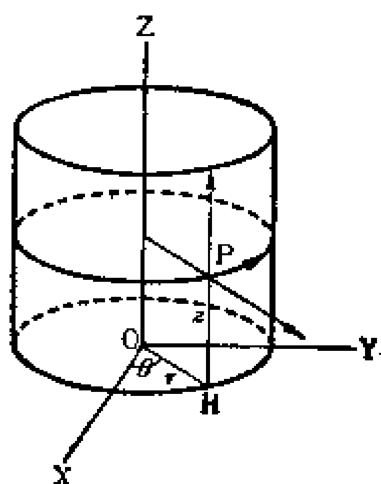


图　26.2

由空間一点 P 引 xy 平面的垂綫，垂綫足記以 H，如令

$$OH=r,\quad \angle XOH=\theta,\quad HP=z,$$

則

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z,$$

(r, θ, z) 叫做点 P 的**圓柱坐标**或**柱面坐标**，这是曲綫坐标的一种。

事实上，r–曲綫是平行于 xy 平面且和 z 軸相交的直綫，θ–曲綫是在 xy 平面的平行平面上，且是中心在 z 軸上的圓，z–曲綫是垂直于 xy 平面的直綫。再者，r–曲面是以 z 軸为中心軸的圓柱面，θ–曲面是包含 z 軸的平面，z–曲面是平行于 xy 平面的平面。

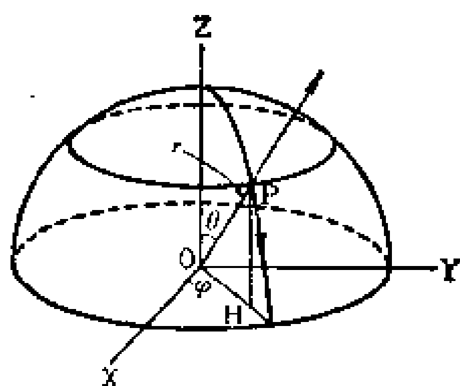


图　26.3

由空間一点 P 引 xy 平面的垂綫 PH，如令

$$OP=r,\ \angle ZOP=\theta,\ \angle XOH=\varphi,$$

則

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z=r\cos\theta.$$

这里的 (r, θ, φ) 叫做点 P 的**极坐标**或**球面坐标**，这也是一种曲綫坐标。

事实上，r-曲綫是过原点的直綫，θ-曲綫位于过 z 軸的平面上，是以原点为中心的圓，φ-曲綫位于 xy 平面的平行平面上，且是中心在 z 軸上的圓。再者，r-曲面是以原点为中心的球面，θ-曲面是以原点为頂点、z 軸为中心軸的直圓錐面，φ-曲面是包含 z 軸的平面。

§27 基本形式

現設以曲綫坐标 (u^1, u^2, u^3) 来表示某一区域内的点 P，从直角坐标系的原点 O 引到点 P 的向量記以 $\boldsymbol{X}$，則 $\boldsymbol{X}$ 可考虑为 (u^1, u^2, u^3) 的函数。如令

$$\boldsymbol{X}_1=\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u^1},\quad \boldsymbol{X}_2=\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u^2},\quad \boldsymbol{X}_3=\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u^3},$$

那么，它們就是切于 u^1-曲綫、u^2-曲綫、u^3-曲綫的向量，由前节的假定，它們是綫性无关的。这就是說，这些向量組成向量的三重系。

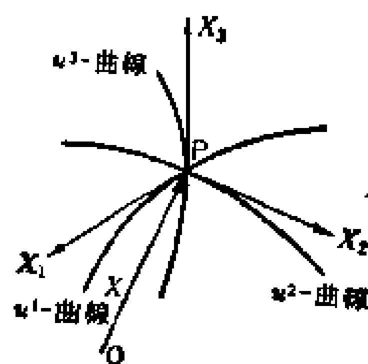


图 27.1

从原点 O 出发，对应于曲綫坐标

$$(u^\varkappa)\ (\varkappa, \lambda, \mu, \cdots=1, 2, 3)$$

的向量記为 $\boldsymbol{X}(u)$，对应于曲綫坐标 $(u^\varkappa+du^\varkappa)$ 的向量記为 $\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{X}$，則因

$$d\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_1du^1+\boldsymbol{X}_2du^2+\boldsymbol{X}_3du^3,$$

以 $(u^\varkappa)$ 为曲綫坐标的点和以 $(u^\varkappa+du^\varkappa)$ 为曲綫坐标的点，它們之間的距离 ds，亦即 $d\boldsymbol{X}$ 之长由下式給出

$$\begin{aligned} ds^2&=d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X}\\ &=(\boldsymbol{X}_1du^1+\boldsymbol{X}_2du^2+\boldsymbol{X}_3du^3)(\boldsymbol{X}_1du^1+\boldsymbol{X}_2du^2+\boldsymbol{X}_3du^3).\end{aligned}$$

因此，如令

$$g_{\mu\lambda}=\boldsymbol{X}_\mu\cdot\boldsymbol{X}_\lambda,$$

則

$$ds^2 = g_{\mu\lambda}(u)\,du^\mu du^\lambda.$$

这个式子称为**基本度量形式**(fundamental metric form)。

在这里，g_{11}，g_{22}，g_{33} 分别是向量 $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$ 之长的平方。如 $\boldsymbol{X}_2$ 与 $\boldsymbol{X}_3$, $\boldsymbol{X}_3$ 与 $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{X}_2$ 所成的角，亦即，u^2-曲綫与 u^3-曲綫、u^3-曲綫与 u^1-曲綫、u^1-曲綫与 u^2-曲綫所成的角各記以 θ_{23}, θ_{31}, θ_{12}, 則

$$\cos\theta_{23} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}}, \quad \cos\theta_{31} = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}}\sqrt{g_{11}}},$$

$$\cos\theta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}.$$

因此，坐标曲綫两两正交的必要与充分条件是

$$g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0,$$

满足这条件的曲綫坐标系叫做**正交曲綫坐标系**(orthogonal curvilinear coordinates)。

对于空間的体积元素 $dV = dx\,dy\,dz$, 因有

$$dV = dx\,dy\,dz = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u^3} & \frac{\partial y}{\partial u^3} & \frac{\partial z}{\partial u^3} \end{vmatrix} du^1\,du^2\,du^3,$$

而且因为

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u^3} & \frac{\partial y}{\partial u^3} & \frac{\partial z}{\partial u^3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1} & \frac{\partial x}{\partial u^2} & \frac{\partial x}{\partial u^3} \\ \frac{\partial y}{\partial u^1} & \frac{\partial y}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial u^3} \\ \frac{\partial z}{\partial u^1} & \frac{\partial z}{\partial u^2} & \frac{\partial z}{\partial u^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix},$$

所以如把 $g_{\mu\lambda}$ 所成的行列式写做 g 时，則体积元素可由

$$dV = \sqrt{g}\;du^1\,du^2\,du^3$$

給出。

由于圓柱坐标满足

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z,$$

如以 $r=u^1$, $\theta=u^2$, $z=u^3$ 时，則向量 $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$ 之直角坐标（支量）分別是

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}_1:(\cos\theta\quad \sin\theta\quad 0)\\&\boldsymbol{X}_2:(-r\sin\theta\quad r\cos\theta\quad 0)\\&\boldsymbol{X}_3:(\quad 0\quad 0\quad 1),\end{aligned}$$

故 $g_{\mu\lambda}$ 的值可表列为

$$g_{\mu\lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

因而

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+dz^2,$$

$$dV=r\,dr\,d\theta\,dz.$$

从此也可看出圓柱坐标系是一种正交曲綫坐标系。

再看极坐标系的情况。由于

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta,$$

如以 $r=u^1$, $\theta=u^2$, $\varphi=u^3$，則向量 $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$ 之坐标(支量)分別是

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}_1:(\sin\theta\cos\varphi\quad \sin\theta\sin\varphi\quad \cos\theta\quad)\\&\boldsymbol{X}_2:(r\cos\theta\cos\varphi\quad r\cos\theta\sin\varphi\quad -r\sin\theta)\\&\boldsymbol{X}_3:(-r\sin\theta\sin\varphi\quad r\sin\theta\cos\varphi\quad 0\quad),\end{aligned}$$

故 $g_{\mu\lambda}$ 的值可表列为

$$g_{\mu\lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&r^2\sin^2\theta\end{pmatrix},$$

因而

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2,$$

$$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

从此也可看出极坐标系也是一种正交曲綫坐标系。

§28 关于曲綫坐标系的支量

在空間內一点 P 处，考虑一个向量 $\boldsymbol{v}$。在这个 P 点的地方，有三个綫性无关的向量所組成的三重系 $\boldsymbol{X}_\lambda$，因此，向量 $\boldsymbol{v}$ 可写成

$$\boldsymbol{v} = v^\kappa \boldsymbol{X}_\kappa = v^1\boldsymbol{X}_1 + v^2\boldsymbol{X}_2 + v^3\boldsymbol{X}_3.$$

这时，我們說向量三重系 $\boldsymbol{X}_\kappa$ 是关于曲綫坐标 (u_λ) 的**自然标架**，(v^κ) 叫做向量 $\boldsymbol{v}$ 关于自然标架 $\boldsymbol{X}_\kappa$ 的逆变支量。

在这情况下，向量 $\boldsymbol{v}$ 之长 v 的平方是

$$(v)^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = (v^\lambda\boldsymbol{X}_\lambda)(v^\kappa\boldsymbol{X}_\kappa) = (\boldsymbol{X}_\lambda\cdot\boldsymbol{X}_\kappa)v^\lambda v^\kappa,$$

也就是

$$(v)^2 = g_{\lambda\kappa}v^\lambda v^\kappa.$$

两个向量

$$\boldsymbol{v} = v^\kappa\boldsymbol{X}_\kappa = v^1\boldsymbol{X}_1 + v^2\boldsymbol{X}_2 + v^3\boldsymbol{X}_3,$$

$$\boldsymbol{w} = w^\kappa\boldsymbol{X}_\kappa = w^1\boldsymbol{X}_1 + w^2\boldsymbol{X}_2 + w^3\boldsymbol{X}_3$$

的內积由

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = (v^\lambda\boldsymbol{X}_\lambda)(w^\kappa\boldsymbol{X}_\kappa) = (\boldsymbol{X}_\lambda\cdot\boldsymbol{X}_\kappa)v^\lambda w^\kappa = g_{\lambda\kappa}v^\lambda w^\kappa$$

所給出。因此，它們所成的角 θ 由下式給出：

$$\cos\theta = \frac{g_{\lambda\kappa}v^\lambda w^\kappa}{\sqrt{g_{\lambda\kappa}v^\lambda v^\kappa}\sqrt{g_{\lambda\kappa}w^\lambda w^\kappa}}.$$

現在来研究，对曲綫坐标施以变换

$$u^{\kappa'} = f^{\kappa'}(u^1, u^2, u^3), \qquad \left|\frac{\partial u^{\kappa'}}{\partial u^\kappa}\right| \neq 0$$

或其逆变换

$$u^{\varkappa}=f^{\varkappa}(u^{1'}, u^{2'}, u^{3'}), \qquad \left|\frac{\partial u^{\varkappa}}{\partial u^{\varkappa'}}\right| \neq 0$$

时，自然标架 $\boldsymbol{X}_{\lambda}$ 所受到的变换。

由定义，有

$$\boldsymbol{X}_{\lambda'}=\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u^{\lambda'}}=\frac{\partial u^{\lambda}}{\partial u^{\lambda'}}\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u^{\lambda}}=\frac{\partial u^{\lambda}}{\partial u^{\lambda'}}\boldsymbol{X}_{\lambda},$$

$$\boldsymbol{X}_{\lambda}=\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u^{\lambda}}=\frac{\partial u^{\lambda'}}{\partial u^{\lambda}}\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u^{\lambda'}}=\frac{\partial u^{\lambda'}}{\partial u^{\lambda}}\boldsymbol{X}_{\lambda'},$$

因此，如令

$$\frac{\partial u^{\lambda}}{\partial u^{\lambda'}}=A_{\lambda'}^{\lambda}, \qquad \frac{\partial u^{\lambda'}}{\partial u^{\lambda}}=A_{\lambda}^{\lambda'},$$

则得到

$$\boldsymbol{X}_{\lambda'}=A_{\lambda'}^{\lambda}\boldsymbol{X}_{\lambda}, \quad \boldsymbol{X}_{\lambda}=A_{\lambda}^{\lambda'}\boldsymbol{X}_{\lambda'}.$$

如果向量 $\boldsymbol{v}$ 对于曲綫坐标系 $(u^{\varkappa})$ 有关的自然标架 $\boldsymbol{X}_{\lambda}$ 写成

$$\boldsymbol{v}=v^{\varkappa}\boldsymbol{X}_{\varkappa},$$

对于曲綫坐标系 $(u^{\varkappa'})$ 有关的自然标架 $\boldsymbol{X}_{\lambda'}$ 写成

$$\boldsymbol{v}=v^{\varkappa'}\boldsymbol{X}_{\varkappa'},$$

在

$$v^{\varkappa'}\boldsymbol{X}_{\varkappa'}=v^{\varkappa}\boldsymbol{X}_{\varkappa}$$

里以 $\boldsymbol{X}_{\varkappa}=A_{\varkappa}^{\varkappa'}\boldsymbol{X}_{\varkappa'}$ 代入，则有

$$v^{\varkappa'}\boldsymbol{X}_{\varkappa'}=v^{\varkappa}A_{\varkappa}^{\varkappa'}\boldsymbol{X}_{\varkappa'}.$$

再注意到 $\boldsymbol{X}_{\varkappa'}$ 是綫性无关的，则得到

$$v^{\varkappa'}=A_{\varkappa}^{\varkappa'}v^{\varkappa}.$$

由于这个原因，称 $v^{\varkappa}$ 是向量 $\boldsymbol{v}$ 关于曲綫坐标系 $(u^{\varkappa})$ 的**逆变支量**。

其次，令

$$v_{\lambda}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{X}_{\lambda},$$

则有

$$v_{\lambda'}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{X}_{\lambda'}=\boldsymbol{v}A_{\lambda'}^{\lambda}\boldsymbol{X}_{\lambda}=A_{\lambda'}^{\lambda}v_{\lambda},$$

亦即

$$v_{\lambda'}=A^{\lambda}_{\lambda'}v_{\lambda}.$$

由于这原因，称 v_λ 是向量 $\boldsymbol{v}$ 关于曲綫坐标系 $(u^\varkappa)$ 的**协变支量**。

逆变支量与协变支量間的关系有

$$v_\lambda=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{X}_\lambda=(v^\varkappa\boldsymbol{X}_\varkappa)\cdot\boldsymbol{X}_\lambda=v^\varkappa g_{\varkappa\lambda},$$

亦即

$$v_\lambda=v^\varkappa g_{\varkappa\lambda}\quad 以及\quad v^\varkappa=g^{\varkappa\lambda}v_\lambda.$$

由于

$$g_{\lambda'\varkappa'}=\boldsymbol{X}_{\lambda'}\cdot\boldsymbol{X}_{\varkappa'}=(A^{\lambda}_{\lambda'}\boldsymbol{X}_\lambda)(A^{\varkappa}_{\varkappa'}\boldsymbol{X}_\varkappa)=A^{\lambda}_{\lambda'}A^{\varkappa}_{\varkappa'}(\boldsymbol{X}_\lambda\boldsymbol{X}_\varkappa),$$

所以基本形式的系数 $g_{\lambda\varkappa}$ 受到的变换是

$$g_{\lambda'\varkappa'}=A^{\lambda}_{\lambda'}A^{\varkappa}_{\varkappa'}g_{\lambda\varkappa}.$$

利用§13的說法，由于曲綫坐标的变换而受到如上变换的量称为張量，因此，$g_{\lambda\varkappa}$ 可叫做**基本度量張量**。

取以上变换式两边的行列式，則有

$$g'=\Delta^2 g,$$

其中

$$\Delta=|A^{\lambda}_{\lambda'}|.$$

如果注意到 $g'>0$，$g>0$，則当 $\Delta>0$ 时，

$$\sqrt{g'}=\Delta\sqrt{g}.$$

受这样变换的量称做(重为1的)**密度**。

在正交曲綫坐标系的情况下，$\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$ 是互相正交的。但 $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$ 并不是单位向量。因此，如令

$$\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\boldsymbol{X}_1,\quad \boldsymbol{v}=\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\boldsymbol{X}_2,\quad \boldsymbol{w}=\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\boldsymbol{X}_3,$$

則化为单位向量。任意向量 $\boldsymbol{A}$ 写成

$$\boldsymbol{A}=A_u\boldsymbol{u}+A_v\boldsymbol{v}+A_w\boldsymbol{w}$$

时，常把这里出现的 A_u, A_v, A_w，称为 $\boldsymbol{A}$ 关于正交曲綫坐标的支量。

例如，在圆柱坐标系的情况下，有

$$\boldsymbol{X}_1(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0),$$
$$\boldsymbol{X}_2(-r\sin\theta,\ r\cos\theta,\ 0),$$
$$\boldsymbol{X}_3(0,\ 0,\ 1).$$

由于这时

$$g_{11}=1,\quad g_{22}=r^2,\quad g_{33}=1,$$

而得

$$\boldsymbol{u}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0),\quad \boldsymbol{v}(-\sin\theta,\ \cos\theta,\ 0),\quad \boldsymbol{w}(0,\ 0,\ 1),$$

因此，任意向量 $\boldsymbol{A}(A_x,\ A_y,\ A_z)$ 写成

$$\boldsymbol{A}=A_r\boldsymbol{u}+A_\theta\boldsymbol{v}+A_z\boldsymbol{w}$$

时，则

$$A_r=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}=A_x\cos\theta+A_y\sin\theta,$$
$$A_\theta=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}=-A_x\sin\theta+A_y\cos\theta,$$
$$A_z=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{w}=A_z.$$

再例如对于极坐标系，有

$$\boldsymbol{X}_1(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta),$$
$$\boldsymbol{X}_2(r\cos\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\sin\varphi,\ -r\sin\theta),$$
$$\boldsymbol{X}_3(-r\sin\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta\cos\varphi,\ 0).$$

这时

$$g_{11}=1,\quad g_{22}=r^2,\quad g_{33}=r^2\sin^2\theta,$$

因而有

$$\boldsymbol{u}(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta),$$
$$\boldsymbol{v}(\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta),$$
$$\boldsymbol{w}(-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0).$$

因此，任意向量 $\boldsymbol{A}(A_x,\ A_y,\ A_z)$ 写成

$$\boldsymbol{A}=A_r\boldsymbol{u}+A_\theta\boldsymbol{v}+A_\varphi\boldsymbol{w}$$

时，则

$$A_r = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u} = A_x \sin\theta\cos\varphi + A_y \sin\theta\sin\varphi + A_z\cos\theta,$$

$$A_\theta = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} = A_x \cos\theta\cos\varphi + A_y \cos\theta\sin\varphi - A_z\sin\theta,$$

$$A_\varphi = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{w} = -A_x \sin\varphi + A_y\cos\varphi.$$

§29 基本方程

对于空間内各点 $\boldsymbol{X}$ 都配备以自然标架 $\boldsymbol{X}_\lambda$。因为 $\boldsymbol{X}_\lambda$ 是由

$$\boldsymbol{X}_\lambda = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u^\lambda}$$

所規定的，当然应滿足

$$d\boldsymbol{X} = du^\varkappa \boldsymbol{X}_\varkappa.$$

作 $\boldsymbol{X}_\lambda$ 关于 u^μ 的偏导数 $\dfrac{\partial \boldsymbol{X}_\lambda}{\partial u^\mu} = \partial_\mu \boldsymbol{X}_\lambda$，因为它仍然是向量，所以它就应当可用 $\boldsymbol{X}_\varkappa$ 的綫性組合来表示，也就是說，可写成

$$\partial_\mu \boldsymbol{X}_\lambda = \Gamma^\varkappa_{\mu\lambda} \boldsymbol{X}_\varkappa.$$

現在我們将对出現在这里的函数 $\Gamma^\varkappa_{\mu\lambda}(u)$ 加以决定。首先，由于 $\partial_\mu \boldsymbol{X}_\lambda = \partial_\lambda \boldsymbol{X}_\mu$，就有

$$\Gamma^\varkappa_{\mu\lambda} \boldsymbol{X}_\varkappa = \Gamma^\varkappa_{\lambda\mu} \boldsymbol{X}_\varkappa,$$

亦即

$$\Gamma^\varkappa_{\mu\lambda} = \Gamma^\varkappa_{\lambda\mu}.$$

对

$$g_{\lambda\rho} = \boldsymbol{X}_\lambda \cdot \boldsymbol{X}_\rho$$

的两边作关于 u^μ 的偏微分，則得

$$\partial_\mu g_{\lambda\rho} = (\partial_\mu \boldsymbol{X}_\lambda)\cdot \boldsymbol{X}_\rho + \boldsymbol{X}_\lambda \cdot (\partial_\mu \boldsymbol{X}_\rho).$$

用

$$\partial_\mu \boldsymbol{X}_\lambda = \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \boldsymbol{X}_\sigma, \quad \partial_\mu \boldsymbol{X}_\rho = \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \boldsymbol{X}_\sigma$$

代入，得到

$$\partial_\mu g_{\lambda\rho} = \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \boldsymbol{X}_\sigma \cdot \boldsymbol{X}_\rho + \boldsymbol{X}_\lambda \cdot \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \boldsymbol{X}_\sigma = \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} (\boldsymbol{X}_\sigma \cdot \boldsymbol{X}_\rho) + \Gamma^\sigma_{\mu\rho} (\boldsymbol{X}_\lambda \cdot \boldsymbol{X}_\sigma),$$

亦即

$$\partial_\mu g_{\lambda\rho}=\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}g_{\sigma\rho}+\Gamma^\sigma_{\mu\rho}g_{\lambda\sigma}.$$

在这式內交换 μ 与 λ，有

$$\partial_\lambda g_{\mu\rho}=\Gamma^\sigma_{\lambda\mu}g_{\sigma\rho}+\Gamma^\sigma_{\lambda\rho}g_{\mu\sigma},$$

在同一式內交换 λ 与 ρ，則有

$$\partial_\rho g_{\mu\lambda}=\Gamma^\sigma_{\rho\mu}g_{\sigma\lambda}+\Gamma^\sigma_{\rho\lambda}g_{\mu\sigma},$$

在上面三式中，以第一式加第二式，然后减去第三式，并注意到 $\Gamma^\varkappa_{\mu\lambda}=\Gamma^\varkappa_{\lambda\mu}$，就得到

$$\partial_\mu g_{\lambda\rho}+\partial_\lambda g_{\mu\rho}-\partial_\rho g_{\mu\lambda}=2\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}g_{\sigma\rho}.$$

就这最后式子的两边各乘以 $\frac{1}{2}g^{\varkappa\rho}$，然后关于 ρ 就 1，2，3 总和起来，則右边是

$$\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}g_{\sigma\rho}g^{\varkappa\rho}=\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\delta^\varkappa_\sigma=\Gamma^\varkappa_{\mu\lambda},$$

因此，最后結果是

$$\Gamma^\varkappa_{\mu\lambda}=\frac{1}{2}g^{\varkappa\rho}(\partial_\mu g_{\lambda\rho}+\partial_\lambda g_{\mu\rho}-\partial_\rho g_{\mu\lambda}).$$

这个式子的右边普通用記号

$$\left\{{\varkappa \atop \mu\lambda}\right\}=\frac{1}{2}g^{\varkappa\rho}(\partial_\mu g_{\lambda\rho}+\partial_\lambda g_{\mu\rho}-\partial_\rho g_{\mu\lambda})$$

来表示，叫做 **Christoffel 三指标記号**。利用这个記号，上面那个式子可写为

$$\Gamma^\varkappa_{\mu\lambda}=\left\{{\varkappa \atop \mu\lambda}\right\},$$

从而得出方程

$$\partial_\mu \boldsymbol{X}_\lambda=\left\{{\varkappa \atop \mu\lambda}\right\}\boldsymbol{X}_\varkappa.$$

这个式子称作曲綫坐标系的**基本方程**。

上式也可改写成

$$d\boldsymbol{X}_\lambda=\left\{{\varkappa \atop \mu\lambda}\right\}du^\mu \boldsymbol{X}_\varkappa,$$

这就是 $\boldsymbol{X}_\lambda$ 的变化 $d\boldsymbol{X}_\lambda$ 用 $\boldsymbol{X}_\varkappa$ 本身来表示的表达式。

如果对于曲綫坐标施以变换

$$u^{\varkappa'}=f^{\varkappa'}(u^1,\ u^2,\ u^3),$$

則在新坐标下，基本方程应該有形式

$$\partial_{\mu'}\boldsymbol{X}_{\lambda'}=\left\{\begin{matrix}\varkappa'\\ \mu'\lambda'\end{matrix}\right\}\boldsymbol{X}_{\varkappa'}.$$

我們将求在曲綫坐标 $(u^{\varkappa})$ 下的 Christoffel 記号 $\left\{\begin{matrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{matrix}\right\}$ 与在曲綫坐标 $(u^{\varkappa'})$ 下的 Christoffel 記号 $\left\{\begin{matrix}\varkappa'\\ \mu'\lambda'\end{matrix}\right\}$ 間的关系。

利用以上的式子，由于

$$\boldsymbol{X}_{\lambda'}=A^{\lambda}_{\lambda'}\boldsymbol{X}_{\lambda},$$

就得出

$$\begin{aligned}\partial_{\mu'}\boldsymbol{X}_{\lambda'}&=(\partial_{\mu'}A^{\varkappa}_{\lambda'})\boldsymbol{X}_{\varkappa}+A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}\partial_{\mu}\boldsymbol{X}_{\lambda}\\ &=\left(\partial_{\mu'}A^{\varkappa}_{\lambda'}+A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}\left\{\begin{matrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{matrix}\right\}\right)\boldsymbol{X}_{\varkappa}.\end{aligned}$$

用

$$\partial_{\mu'}\boldsymbol{X}_{\lambda'}=\left\{\begin{matrix}\varkappa'\\ \mu'\lambda'\end{matrix}\right\}\boldsymbol{X}_{\varkappa'}=A^{\varkappa}_{\varkappa'}\left\{\begin{matrix}\varkappa'\\ \mu'\lambda'\end{matrix}\right\}\boldsymbol{X}_{\varkappa}$$

代入，得到

$$\left(\partial_{\mu'}A^{\varkappa}_{\lambda'}+A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}\left\{\begin{matrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{matrix}\right\}\right)\boldsymbol{X}_{\varkappa}=A^{\varkappa}_{\varkappa'}\left\{\begin{matrix}\varkappa'\\ \mu'\lambda'\end{matrix}\right\}\boldsymbol{X}_{\varkappa},$$

亦卽

$$A^{\varkappa}_{\varkappa'}\left\{\begin{matrix}\varkappa'\\ \mu'\lambda'\end{matrix}\right\}=A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}\left\{\begin{matrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{matrix}\right\}+\partial_{\mu'}A^{\varkappa}_{\lambda'}.$$

这就是 $\left\{\begin{matrix}\varkappa'\\ \mu'\lambda'\end{matrix}\right\}$ 和 $\left\{\begin{matrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{matrix}\right\}$ 間的关系式。

把基本方程

$$\partial_{\mu}\boldsymbol{X}_{\lambda}=\left\{\begin{matrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{matrix}\right\}\boldsymbol{X}_{\varkappa}$$

代入恒等式

$$\partial_{\nu}\partial_{\mu}\boldsymbol{X}_{\lambda}=\partial_{\mu}\partial_{\nu}\boldsymbol{X}_{\lambda}$$

里去試試看。首先在左边有

$$\partial_\nu\partial_\mu \boldsymbol{X}_\lambda=\partial_\nu\left(\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}\boldsymbol{X}_\varkappa\right)=\left(\partial_\nu\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}\right)\boldsymbol{X}_\varkappa+\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}\partial_\nu \boldsymbol{X}_\rho$$

$$=\left(\partial_\nu\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}\right)\boldsymbol{X}_\varkappa+\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \nu\rho\end{Bmatrix}\boldsymbol{X}_\varkappa,$$

那就是

$$\partial_\nu\partial_\mu \boldsymbol{X}_\lambda=\left[\partial_\nu\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \nu\rho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}\right]\boldsymbol{X}_\varkappa.$$

同样在右边有

$$\partial_\mu\partial_\nu \boldsymbol{X}_\lambda=\left[\partial_\mu\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \nu\lambda\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \mu\rho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\rho\\ \nu\lambda\end{Bmatrix}\right]\boldsymbol{X}_\varkappa.$$

因左右两边相等，所以

$$\left[\partial_\nu\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \nu\rho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}\right]\boldsymbol{X}_\varkappa=\left[\partial_\mu\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \nu\lambda\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \mu\rho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\rho\\ \nu\lambda\end{Bmatrix}\right]\boldsymbol{X}_\varkappa,$$

那也就是

$$K_{\nu\mu\lambda}^{\cdots\varkappa}\equiv\partial_\nu\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}-\partial_\mu\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \nu\lambda\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \nu\rho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\rho\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \mu\rho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\rho\\ \nu\lambda\end{Bmatrix}=0.$$

这說明了在曲綫坐标下的 Christoffel 記号 $\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}$ 非满足上面的恒等式不可。

§30 协变微分

向量場 $\boldsymbol{v}$ 关于自然标架 $\boldsymbol{X}_\lambda$ 表示为

$$\boldsymbol{v}=v^\varkappa \boldsymbol{X}_\varkappa,$$

兹試求其微分 $d\boldsymbol{v}$. 因

$$d\boldsymbol{v}=(dv^\varkappa)\boldsymbol{X}_\varkappa+v^\lambda d\boldsymbol{X}_\lambda,$$

对于这里的 $d\boldsymbol{X}_\lambda$, 用

$$d\boldsymbol{X}_\lambda=\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}du^\mu \boldsymbol{X}_\varkappa$$

代进去，得到

$$d\boldsymbol{v}=(dv^\varkappa)\boldsymbol{X}_\varkappa+v^\lambda\left(\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}du^\mu \boldsymbol{X}_\varkappa\right),$$

再写成

$$d\boldsymbol{v}=\left(dv^{\varkappa}+\left\{{\varkappa \atop \mu\lambda}\right\}du^{\mu}v^{\lambda}\right)\boldsymbol{X}_{\varkappa}.$$

这里出現的 $d\boldsymbol{v}$ 的逆变支量

$$\delta v^{\varkappa}=dv^{\varkappa}+\left\{{\varkappa \atop \mu\lambda}\right\}du^{\mu}v^{\lambda}$$

称为逆变支量 $v^{\varkappa}$ 的**协变微分或絕对微分** (covariant or absolute differential)。

如上式写成

$$\delta v^{\varkappa}=\left(\partial_{\mu}v^{\varkappa}+\left\{{\varkappa \atop \mu\lambda}\right\}v^{\lambda}\right)du^{\mu},$$

則可推知

$$\nabla_{\mu}v^{\varkappa}=\partial_{\mu}v^{\varkappa}+\left\{{\varkappa \atop \mu\lambda}\right\}v^{\lambda}$$

是一个張量,称它是 $v^{\varkappa}$ 的**协变导数或絕对导数**。

完全同样,試考虑向量 $d\boldsymbol{v}$ 的协变支量,它是由 $d\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{X}_{\lambda}$ 所規定的。就

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{X}_{\lambda}=v_{\lambda}$$

的两边取微分,

$$d\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{X}_{\lambda}+\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{X}_{\lambda}=dv_{\lambda},$$

$$d\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{X}_{\lambda}=dv_{\lambda}-\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{X}_{\lambda}.$$

这里的 $d\boldsymbol{X}_{\lambda}$ 用

$$d\boldsymbol{X}_{\lambda}=\left\{{\varkappa \atop \mu\lambda}\right\}du^{\mu}\boldsymbol{X}_{\varkappa}$$

来代换,就得到

$$d\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{X}_{\lambda}=dv_{\lambda}-\boldsymbol{v}\cdot\left\{{\varkappa \atop \mu\lambda}\right\}du^{\mu}\boldsymbol{X}_{\varkappa}=dv_{\lambda}-\left\{{\varkappa \atop \mu\lambda}\right\}du^{\mu}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{X}_{\varkappa}),$$

再写成

$$d\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{X}_{\lambda}=dv_{\lambda}-\left\{{\varkappa \atop \mu\lambda}\right\}du^{\mu}v_{\varkappa}.$$

这里出现的$d\boldsymbol{v}$的协变支量

$$\delta v_\lambda = dv_\lambda - \left\{ {\varkappa \atop \mu\lambda} \right\} du^\mu v_\varkappa$$

称为协变支量 v_λ 的协变微分或絕对微分。

如上式写成

$$\delta v_\lambda = \left(\partial_\mu v_\lambda - \left\{ {\varkappa \atop \mu\lambda} \right\} v_\varkappa \right) du^\mu,$$

則可推知

$$\nabla_\mu v_\lambda = \partial_\mu v_\lambda - \left\{ {\varkappa \atop \mu\lambda} \right\} v_\varkappa$$

是一个張量，称它是 v_λ 之协变导数或絕对导数。

完全同样，張量場，例如 $T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$ 的协变微分可由

$$\delta T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = dT_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} + \left\{ {\varkappa \atop \nu\rho} \right\} du^\nu T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\rho} - \left\{ {\rho \atop \nu\mu} \right\} du^\nu T_{\rho\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa}$$

$$- \left\{ {\rho \atop \nu\lambda} \right\} du^\nu T_{\mu\rho}^{\cdot\cdot\varkappa}$$

定义，其协变导数可定义为

$$\nabla_\nu T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} = \partial_\nu T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} + \left\{ {\varkappa \atop \nu\rho} \right\} T_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\rho} - \left\{ {\rho \atop \nu\mu} \right\} T_{\rho\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} - \left\{ {\rho \atop \nu\lambda} \right\} T_{\mu\rho}^{\cdot\cdot\varkappa}.$$

某个張量的协变微分是和原張量同类的張量，其协变导数則是比原張量多一个协变指标的張量，这只要用 $\left\{ {\varkappa \atop \mu\lambda} \right\}$ 的变换式就能够証明。

就关系式

$$g_{\mu\lambda} = \boldsymbol{X}_\mu \cdot \boldsymbol{X}_\lambda$$

的两边取微分，則

$$dg_{\mu\lambda} = (d\boldsymbol{X}_\mu) \cdot \boldsymbol{X}_\lambda + \boldsymbol{X}_\mu \cdot (d\boldsymbol{X}_\lambda),$$

在这里用

$$d\boldsymbol{X}_\mu = \left\{ {\varkappa \atop \nu\mu} \right\} du^\nu \boldsymbol{X}_\varkappa, \quad d\boldsymbol{X}_\lambda = \left\{ {\varkappa \atop \nu\lambda} \right\} du^\nu \boldsymbol{X}_\varkappa$$

代入，則有

$$dg_{\mu\lambda}=\left\{ {\varkappa \atop \nu\mu} \right\} du^{\nu}\boldsymbol{X}_{\varkappa}\cdot\boldsymbol{X}_{\lambda}+\left\{ {\varkappa \atop \nu\lambda} \right\} du^{\nu}\boldsymbol{X}_{\mu}\cdot\boldsymbol{X}_{\varkappa},$$

因而得到

$$dg_{\mu\lambda}=\left\{ {\varkappa \atop \nu\mu} \right\} du^{\nu}g_{\varkappa\lambda}+\left\{ {\varkappa \atop \nu\lambda} \right\} du^{\nu}g_{\mu\varkappa},$$

这就表示出

$$\delta g_{\mu\lambda}=dg_{\mu\lambda}-\left\{ {\varkappa \atop \nu\mu} \right\} d\mu^{\nu}g_{\varkappa\lambda}-\left\{ {\varkappa \atop \nu\lambda} \right\} du^{\nu}g_{\mu\varkappa}=0,$$

亦即，$g_{\mu\varkappa}$ 的协变微分等于0。从而，$g_{\mu\lambda}$ 的协变导数当然也等于0，这就是說

$$\nabla_{\nu}g_{\mu\lambda}=\partial_{\nu}g_{\mu\lambda}-\left\{ {\varkappa \atop \nu\mu} \right\} g_{\varkappa\lambda}-\left\{ {\varkappa \atop \nu\lambda} \right\} g_{\mu\varkappa}=0.$$

由于向量 $v^{\varkappa}$ 的协变导数 $\nabla_{\mu}v^{\varkappa}$ 是一个張量，因此，对于它还可作出协变导数 $\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}v^{\varkappa}$。从这里計算 $\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}v^{\varkappa}-\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}v^{\varkappa}$，則有

$$\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}v^{\varkappa}-\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}v^{\varkappa}=K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}v^{\lambda},$$

但因里面的 $K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}=0$，所以

$$\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}v^{\varkappa}-\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}v^{\varkappa}=0$$

成立。同样由于

$$\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}v_{\lambda}-\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}v_{\lambda}=-K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}v_{\varkappa},$$

所以

$$\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}v_{\lambda}-\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}v_{\lambda}=0$$

也成立。

§31 張量 $e_{\nu\mu\lambda}$ 和 $e^{\nu\mu\lambda}$

我們用下述条件来規定 $\varepsilon_{\nu\mu\lambda}$ 和 $\varepsilon^{\nu\mu\lambda}$ 这样两个記号：

$$\varepsilon_{\nu\mu\lambda}=\varepsilon^{\nu\mu\lambda}=\begin{cases}+1: & \text{当}(\nu\mu\lambda)\text{是}(123)\text{的偶排列时，}\\ -1: & \text{当}(\nu\mu\lambda)\text{是}(123)\text{的奇排列时，}\\ \ \ 0: & \text{其他情况。}\end{cases}$$

用了这样的記号 ε 容易驗証，行列式可写做

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^\nu a_2^\mu a_3^\lambda \varepsilon_{\nu\mu\lambda} = a_\nu^1 a_\mu^2 a_\lambda^3 \varepsilon^{\nu\mu\lambda}.$$

如把行列式的值記为 a，就可看出

$$a\varepsilon_{\tau\sigma\rho} = a_\tau^\nu a_\sigma^\mu a_\rho^\lambda \varepsilon_{\nu\mu\lambda}, \quad a\varepsilon^{\tau\sigma\rho} = a_\nu^\tau a_\mu^\sigma a_\lambda^\rho \varepsilon^{\nu\mu\lambda}.$$

对于 $A_{\kappa'}^{\kappa}$ 的行列式 Δ，利用上面左边的写法，有

$$\Delta\varepsilon_{\nu'\mu'\lambda'} = A_{\nu'}^\nu A_{\mu'}^\mu A_{\lambda'}^\lambda \varepsilon_{\nu\mu\lambda}; \tag{31.1}$$

对于 $A_\kappa^{\kappa'}$ 的行列式 $\frac{1}{\Delta}$，利用上面右边的写法，則有

$$\frac{1}{\Delta}\varepsilon^{\nu'\mu'\lambda'} = A_\nu^{\nu'} A_\mu^{\mu'} A_\lambda^{\lambda'} \varepsilon^{\nu\mu\lambda}. \tag{31.2}$$

作(31.1)和 $\sqrt{g'} = \Delta\sqrt{g}$ 的乘积，得

$$\sqrt{g'}\,\varepsilon_{\nu'\mu'\lambda'} = A_{\nu'}^\nu A_{\mu'}^\mu A_{\lambda'}^\lambda \sqrt{g}\,\varepsilon_{\nu\mu\lambda}.$$

这个式子說明了由

$$e_{\nu\mu\lambda} = \sqrt{g}\,\varepsilon_{\nu\mu\lambda}$$

所定义的量是一个协变張量的支量。

作(31.2)和 $\frac{1}{\sqrt{g'}} = \frac{1}{\Delta}\frac{1}{\sqrt{g}}$ 的乘积，得

$$\frac{1}{\sqrt{g'}}\varepsilon^{\nu'\mu'\lambda'} = A_\nu^{\nu'} A_\mu^{\mu'} A_\lambda^{\lambda'} \frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{\nu\mu\lambda}.$$

这說明了，由

$$e^{\nu\mu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{\nu\mu\lambda}$$

所定义的量是一个逆变張量的支量。

因为 $\varepsilon_{\nu\mu\lambda}$ 和 $\varepsilon^{\nu\mu\lambda}$ 的每一个关于指标 ν, μ, λ 是反称的，所以这里定义的張量 $e_{\nu\mu\lambda}$ 和 $e^{\nu\mu\lambda}$ 关于三指标 ν, μ, λ 也是反称的。

更由于

$$e^{\nu\mu\lambda}g_{\nu\tau}g_{\mu\sigma}g_{\lambda\rho}=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{\nu\mu\lambda}g_{\nu\tau}g_{\mu\sigma}g_{\lambda\rho}=\frac{1}{\sqrt{g}}\cdot g\cdot\varepsilon_{\tau\sigma\rho}$$

$$=\sqrt{g}\,\varepsilon_{\tau\sigma\rho}=e_{\tau\sigma\rho},$$

$$e_{\nu\mu\lambda}g^{\nu\tau}g^{\mu\sigma}g^{\lambda\rho}=\sqrt{g}\,\varepsilon_{\nu\mu\lambda}g^{\nu\tau}g^{\mu\sigma}g^{\lambda\rho}=\sqrt{g}\cdot\frac{1}{g}\varepsilon^{\tau\sigma\rho}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{\tau\sigma\rho}=e^{\tau\sigma\rho},$$

所以 $\varepsilon^{\nu\mu\lambda}$ 和 $\varepsilon_{\nu\mu\lambda}$ 是相伴的張量。

最后試計算 $e_{\nu\mu\lambda}$ 和 $e^{\nu\mu\lambda}$ 的协变导数。因

$$\nabla_\omega e_{\nu\mu\lambda}=\partial_\omega e_{\nu\mu\lambda}-\left\{\begin{matrix}\varkappa\\\omega\nu\end{matrix}\right\}e_{\varkappa\mu\lambda}-\left\{\begin{matrix}\varkappa\\\omega\,\mu\end{matrix}\right\}e_{\nu\varkappa\lambda}-\left\{\begin{matrix}\varkappa\\\omega\lambda\end{matrix}\right\}e_{\nu\mu\varkappa},$$

所以,如 ν, μ, λ 中有两个相等的話,則式的右边恒等于0. 因此,我們現在就 ν, μ, λ 各不相等,例如說 $\nu=1$, $\mu=2$, $\lambda=3$ 的情况来討論。这时

$$\nabla_\omega e_{123}=\partial_\omega e_{123}-\left\{\begin{matrix}\varkappa\\\omega1\end{matrix}\right\}e_{\varkappa23}-\left\{\begin{matrix}\varkappa\\\omega2\end{matrix}\right\}e_{1\varkappa3}-\left\{\begin{matrix}\varkappa\\\omega3\end{matrix}\right\}e_{12\varkappa}$$

$$=\partial_\omega e_{123}-\left(\left\{\begin{matrix}1\\\omega1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}2\\\omega2\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}3\\w3\end{matrix}\right\}\right)e_{123}.$$

但因 $e_{123}=\sqrt{g}$, 所以有

$$\nabla_\omega e_{123}=\partial_\omega\sqrt{g}-\left\{\begin{matrix}\varkappa\\\omega\varkappa\end{matrix}\right\}\sqrt{g}. \qquad (31.3)$$

另一方面,有

$$\left\{\begin{matrix}\varkappa\\\omega\varkappa\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}g^{\varkappa\rho}(\partial_\omega g_{\varkappa\rho}+\partial_\varkappa g_{\omega\rho}-\partial_\rho g_{\omega\varkappa})=\frac{1}{2}g^{\varkappa\rho}\partial_\omega g_{\varkappa\rho}.$$

在行列式

$$g=\begin{vmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{vmatrix}$$

內,元素 $g_{\varkappa\rho}$ 的余因式是 $gg^{\varkappa\rho}$,所以由行列式的微分法則, g 的微分可写做

$$\partial_\omega g=(\partial_\omega g_{\varkappa\rho})gg^{\varkappa\rho},$$

因而，

$$g^{\varkappa\rho}(\partial_\omega g_{\varkappa\rho})=\partial_\omega \log g,$$

把它代进前面的式子里，就有

$$\left\{\begin{matrix}\varkappa\\ \omega\varkappa\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}g^{\varkappa\rho}(\partial_\omega g_{\varkappa\rho})=\frac{1}{2}\partial_\omega \log g=\partial_\omega \log\sqrt{g}.$$

由这式和(31.3)，就得到

$$\nabla_\omega e_{123}=0.$$

因此，有

$$\nabla_\omega e_{\nu\mu\lambda}=0,$$

同样，有

$$\nabla_\omega e^{\nu\mu\lambda}=0.$$

§32 梯　度

設空間內有一个数量 f，它和曲綫坐标 $(u^\varkappa)$ 有关而写成 $f(u^\varkappa)$。这个数量場的协变微分

$$\nabla_\lambda f=\partial_\lambda f$$

是一个向量的协变支量。因此，

$$\nabla^\varkappa f=g^{\varkappa\lambda}\nabla_\lambda f=g^{\varkappa\lambda}\partial_\lambda f$$

是它的逆变支量。

如果坐标系是由正交軸构成的，則因上式的最右边部分就 $\varkappa=1, 2, 3$ 而論，分别是

$$\frac{\partial f}{\partial u^1},\ \frac{\partial f}{\partial u^2},\ \frac{\partial f}{\partial u^3},$$

亦即

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z},$$

所以 $\nabla_\lambda f$ 与 $\nabla^\varkappa f$ 是曲綫坐标系下 f 的梯度的支量。

在正交曲綫坐标系下，$\nabla^\varkappa f$ 的支量是

$$\nabla^1 f = g^{11}\frac{\partial f}{\partial u^1},\quad \nabla^2 f = g^{22}\frac{\partial f}{\partial u^2},\quad \nabla^3 f = g^{33}\frac{\partial f}{\partial u^3},$$

或

$$\nabla^1 f = \frac{1}{g_{11}}\,\frac{\partial f}{\partial u^1},\quad \nabla^2 f = \frac{1}{g_{22}}\,\frac{\partial f}{\partial u^2},\quad \nabla^3 f = \frac{1}{g_{33}}\,\frac{\partial f}{\partial u^3}.$$

由于 ∇f 关于自然标架 $\boldsymbol{X}_\lambda$ 可表示成

$$\nabla f = (\nabla^1 f)\boldsymbol{X}_1 + (\nabla^2 f)\boldsymbol{X}_2 + (\nabla^3 f)\boldsymbol{X}_3,$$

因此，在正交曲綫坐标系的情况下，如令

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\boldsymbol{X}_1,\quad \boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\boldsymbol{X}_2,\quad \boldsymbol{w} = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\boldsymbol{X}_3,$$

则有

$$\nabla f = (\sqrt{g_{11}}\,\nabla^1 f)\,\boldsymbol{u} + (\sqrt{g_{22}}\,\nabla^2 f)\,\boldsymbol{v} + (\sqrt{g_{33}}\,\nabla^3 f)\boldsymbol{w}.$$

对于圆柱坐标系而論，因有

$$g_{11} = 1,\quad g_{22} = r^2,\quad g_{33} = 1,$$

所以

$$\nabla^1 f = \frac{\partial f}{\partial r},\quad \nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial f}{\partial \theta},\quad \nabla^3 f = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

如将梯度写成

$$\nabla f = (\mathrm{grad}_r f)\boldsymbol{u} + (\mathrm{grad}_\theta f)\boldsymbol{v} + (\mathrm{grad}_z f)\boldsymbol{w},$$

则有

$$\mathrm{grad}_r f = \frac{\partial f}{\partial r},\quad \mathrm{grad}_\theta f = \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta},\quad \mathrm{grad}_z f = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

对于极坐标系而論，因有

$$g_{11} = 1,\quad g_{22} = r^2,\quad g_{33} = r^2\sin^2\theta,$$

所以

$$\nabla^1 f = \frac{\partial f}{\partial z},\quad \nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial f}{\partial \theta},\quad \nabla^3 f = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

如将梯度写成

$$\nabla f = (\mathrm{grad}_r f)\boldsymbol{u} + (\mathrm{grad}_\theta f)\boldsymbol{v} + (\mathrm{grad}_\varphi f)\boldsymbol{w},$$

则有

$$\operatorname{grad}_r f=\frac{\partial f}{\partial z},\quad \operatorname{grad}_\theta f=\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta},\quad \operatorname{grad}_\varphi f=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

§33 散　度

在空間内給定一个向量場 $\boldsymbol{A}$，設它关于一个自然标架表示成

$$\boldsymbol{A}=A^\varkappa \boldsymbol{X}_\varkappa.$$

作 $A^\varkappa$ 的协变导数

$$\nabla_\mu A^\varkappa=\partial_\mu A^\varkappa+\left\{\begin{matrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{matrix}\right\}A^\lambda,$$

它是一个張量。对它进行縮約

$$\nabla_\mu A^\mu=\partial_\mu A^\mu+\left\{\begin{matrix}\mu\\ \mu\lambda\end{matrix}\right\}A^\lambda=\partial_\mu A^\mu+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u^\lambda}A^\lambda,$$

这样就得出一个数量

$$\nabla_\mu A^\mu=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,A^\mu}{\partial u^\mu}.$$

如果坐标系是直角坐标系的話，則右边是

$$\frac{\partial A^1}{\partial x}+\frac{\partial A^2}{\partial y}+\frac{\partial A^3}{\partial z},$$

因此，$\nabla_\mu A^\mu$ 表出了在曲綫坐标系下向量 $\boldsymbol{A}$ 的散度。

如果曲綫坐标系是正交曲綫坐标系，則因

$$g_{23}=0,\quad g_{31}=0,\quad g_{12}=0$$

以及

$$g=g_{11}g_{22}g_{33},$$

因此，

$$\nabla_\mu A^\mu=\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}\left[\frac{\partial\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\,A^1}{\partial u^1}+\frac{\partial\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\,A^2}{\partial u^2}+\frac{\partial\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\,A^3}{\partial u^3}\right].\quad(33.1)$$

这时，如向量 $\boldsymbol{A}(A^1,\ A^2,\ A^3)$ 用 $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}$ 来表示，写成

$$\boldsymbol{A}=A_u\boldsymbol{u}+A_v\boldsymbol{v}+A_w\boldsymbol{w},$$

则因

$$A_u=\sqrt{g_{11}}\,A^1,\qquad A_v=\sqrt{g_{22}}\,A^2,\qquad A_w=\sqrt{g_{33}}\,A^3,$$

从而

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\nabla_\mu A^\mu=\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}\left[\frac{\partial\sqrt{g_{22}g_{33}}\,A_u}{\partial u^1}+\frac{\partial\sqrt{g_{33}g_{11}}\,A_v}{\partial u^2}+\frac{\partial\sqrt{g_{11}g_{22}}\,A_w}{\partial u^3}\right].$$

关于圆柱坐标系，因 $g_{11}=1,\ g_{22}=r^2,\ g_{33}=1$，所以

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{\partial}{\partial\theta}A_\theta+\frac{\partial}{\partial z}(rA_z)\right]=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}A_\theta+\frac{\partial}{\partial z}A_z.$$

关于极坐标系，因有 $g_{11}=1,\ g_{22}=r^2,\ g_{33}=r^2\sin^2\theta$，所以

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\,A_r)+\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\,A_\theta)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\varphi)\right]=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}A_\varphi.$$

当空間内一个数量場 f 給定时，首先作它的梯度 $\nabla^\mu f=g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda f$，然后再考虑散度，則得

$$\nabla_\mu(\nabla^\mu f)=\nabla_\mu(g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda f)=g^{\mu\lambda}\nabla_\mu\nabla_\lambda f,$$

这式的右边对于直角坐标系而論，則是

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

因此，

$$\Delta f=g^{\mu\lambda}\nabla_\mu\nabla_\lambda f$$

可看做是曲綫坐标系的 Laplace 运算子。

如果曲綫坐标系是正交曲綫坐标系，以

$$A^1=g^{11}\partial_1 f,\quad A^2=g^{22}\partial_2 f,\quad A^3=g^{33}\partial_3 f$$

代入(33.1)內，即得

$$\Delta f=\nabla_\mu(\nabla^\mu f)=\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}\left[\partial_1\left(\frac{\sqrt{g_{22}g_{33}}}{\sqrt{g_{11}}}\partial_1 f\right)\right.$$

$$\left.+\partial_2\left(\frac{\sqrt{g_{33}g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\partial_2 f\right)+\partial_3\left(\frac{\sqrt{g_{11}g_{22}}}{\sqrt{g_{33}}}\partial_3 f\right)\right].$$

对圆柱坐标系利用以上一般公式时，因

$$g_{11}=1,\quad g_{22}=r^2,\quad g_{33}=1,$$

所以

$$\Delta f=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

再对极坐标系利用一般公式时，则因

$$g_{11}=1,\quad g_{22}=r^2,\quad g_{33}=r^2\sin^2\theta,$$

所以

$$\Delta f=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

§ 34 旋　度

設空間內一个向量場 $\boldsymbol{A}$ 为已給，并設它关于自然标架的协变支量为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}_\lambda=A_\lambda,$$

它的协变导数

$$\nabla_\mu A_\lambda=\partial_\mu A_\lambda-\left\{{\varkappa \atop \mu\lambda}\right\}A_\varkappa$$

是一个張量，因而

$$\nabla_\mu A_\lambda - \nabla_\lambda A_\mu = \partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu$$

是一个反称張量。从此又知道

$$\frac{1}{2} e^{\nu\mu\lambda} (\nabla_\mu A_\lambda - \nabla_\lambda A_\mu) = \frac{1}{2} e^{\nu\mu\lambda} (\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu)$$

是一个向量。

如果坐标系是直角坐标系的話，上式的右边給出

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y},$$

因此，前式可以看做是曲綫坐标系下向量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度。

当坐标系是正交曲綫坐标系时，設

$$\boldsymbol{A} = A^\varkappa \boldsymbol{X}_\varkappa,$$

則因 $A_\lambda = g_{\lambda\varkappa} A^\varkappa$，而有

$$A_1 = g_{11} A^1, \quad A_2 = g_{22} A^2, \quad A_3 = g_{33} A^3,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的旋度的支量是

$$\frac{1}{2} e^{1\mu\lambda} (\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu) = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}}} [\partial_2 (g_{33} A^3) - \partial_3 (g_{22} A^2)],$$

$$\frac{1}{2} e^{2\mu\lambda} (\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu) = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}}} [\partial_3 (g_{11} A^1) - \partial_1 (g_{33} A^3)],$$

$$\frac{1}{2} e^{3\mu\lambda} (\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu) = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}}} [\partial_1 (g_{22} A^2) - \partial_2 (g_{11} A^1)].$$

这时，向量 $\boldsymbol{A}$ 和 rot $\boldsymbol{A}$ 如用 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 来表示，即

$$\boldsymbol{A} = A_u \boldsymbol{u} + A_v \boldsymbol{v} + A_w \boldsymbol{w},$$

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} = (\mathrm{rot}_u\, \boldsymbol{A}) \boldsymbol{u} + (\mathrm{rot}_v\, \boldsymbol{A}) \boldsymbol{v} + (\mathrm{rot}_w\, \boldsymbol{A}) \boldsymbol{w},$$

則

$$A_u = \sqrt{g_{11}}\, A^1,$$

$$A_v = \sqrt{g_{22}}\, A^2,$$

$$A_w = \sqrt{g_{33}}\, A^3;$$

$$\mathrm{rot}_u\, \boldsymbol{A} = \sqrt{g_{11}}\, (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A})^1,$$

$$\mathrm{rot}_v\,\boldsymbol{A}=\sqrt{g_{22}}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})^2,$$
$$\mathrm{rot}_w\,\boldsymbol{A}=\sqrt{g_{33}}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})^3.$$

其中 $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})^\lambda$ 表示 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ 关于 $\boldsymbol{X}_\lambda$ 的逆变支量。因此，

$$\mathrm{rot}_u\,\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}\left[\frac{\partial\sqrt{g_{33}}\,A_w}{\partial u^2}-\frac{\partial\sqrt{g_{22}}\,A_v}{\partial u^3}\right],$$
$$\mathrm{rot}_v\,\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}\left[\frac{\partial\sqrt{g_{11}}\,A_u}{\partial u^3}-\frac{\partial\sqrt{g_{33}}\,A_w}{\partial u^1}\right],$$
$$\mathrm{rot}_w\,\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left[\frac{\partial\sqrt{g_{22}}\,A_v}{\partial u^1}-\frac{\partial\sqrt{g_{11}}\,A_u}{\partial u^2}\right].$$

特别，当坐标是圆柱坐标时，因

$$g_{11}=1,\quad g_{22}=r^2,\quad g_{33}=1,$$

所以

$$\mathrm{rot}_r\,\boldsymbol{A}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial z}(rA_\theta)\right]=\frac{1}{r}\,\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z},$$
$$\mathrm{rot}_\theta\,\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r},$$
$$\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{A}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right].$$

当坐标是极坐标时，则因

$$g_{11}=1,\quad g_{22}=r^2,\quad g_{33}=r^2\sin^2\theta,$$

所以

$$\mathrm{rot}_r\,\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\,A_\varphi)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\theta)\right]$$
$$=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,A_\varphi)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right],$$
$$\mathrm{rot}_\theta\,\boldsymbol{A}=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\,A_\varphi)\right]$$
$$=\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right],$$
$$\mathrm{rot}_\varphi\,\boldsymbol{A}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right].$$

第3篇 微分几何

第8章 曲面論

§35 曲　面

空間里的曲面在直角坐标下設其表現的形式为

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v).$$

这里假定矩陣

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

的秩数为2. 这时，如果規定了曲面上的一点就有一組数(u, v)被确定；反之，如果有这样一組数(u, v)，則在曲面上就确定出一点，因此，这样的(u, v)可以取作曲面上点的坐标。这一事实，如用从原点O引至曲面上一点P的位置向量$\boldsymbol{X}$来表达的話，則曲面的方程可由

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(u, v)$$

給出。这时，向量

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}$$

是綫性无关的。

今后为了写法方便起見，以$u=u^1$, $v=u^2$；由原点O引至曲面

上一点 P 的位置向量以

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(u^1, u^2)$$

表示。更設

$$\boldsymbol{X}_1=\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u^1}=\partial_1\boldsymbol{X},\quad \boldsymbol{X}_2=\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u^2}=\partial_2\boldsymbol{X},$$

簡言之，即設

$$\boldsymbol{X}_i=\partial_i\boldsymbol{X}\qquad (h, i, j, k\cdots=1, 2).$$

在曲面上只有 u^1 变化时，曲面上即得出一条曲綫，称为 $\boldsymbol{u^1}$-曲綫。又当 u^2 单独变化时，在曲面上另得出一条曲綫，称为 $\boldsymbol{u^2}$-曲綫。由偏微分的定义就知道 $\boldsymbol{X}_1$ 是切于 u^1-曲綫的向量，$\boldsymbol{X}_2$ 是切于 u^2-曲綫的向量。因此，我們説 $\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{X}_2$ 是切于曲面的向量，彼此綫性无关。

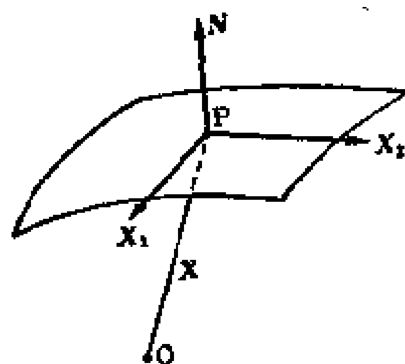


图 35.1

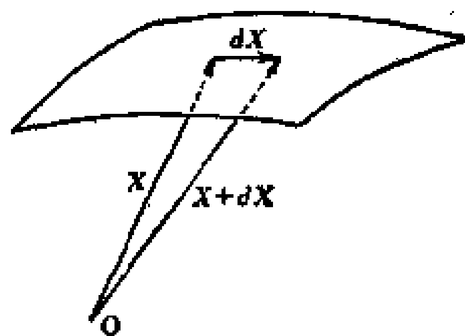


图 35.2

曲面上两点 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{X}+d\boldsymbol{X}$ 間的距离 ds，亦即向量 $d\boldsymbol{X}$ 之长，由于

$$d\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_i du^i,$$

而有

$$ds^2=d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_j du^j)(\boldsymbol{X}_i du^i)=(\boldsymbol{X}_j\cdot\boldsymbol{X}_i)du^j du^i,$$

如令

$$g_{ji}=\boldsymbol{X}_j\cdot\boldsymbol{X}_i,$$

則有

$$ds^2 = g_{jl} du^j du^l .$$

这个式子普通称为曲面的**第一基本形式**，如用习惯的写法，那就是

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

这里

$$g_{11} = E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$

$$g_{12} = g_{21} = F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$

$$g_{22} = G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

关于 u, v 的偏微分用附在下角的指标来表示。

由 g_{jl} 組成的行列式 g 当然不会是 0，所以满足

$$g^{hl} g_{jl} = \delta_j^h$$

的 g^{hl} 可以求出。如用 E, F, G 来表示，则

$$g^{11} = \frac{G}{EG - F^2}, \quad g^{12} = g^{21} = \frac{-F}{EG - F^2}, \quad g^{22} = \frac{E}{EG - F^2}.$$

切于曲面的向量 $\boldsymbol{a}$ 可用 $\boldsymbol{a} = a^h \boldsymbol{X}_h$ 的形式表示出来，其长 a 的平方为

$$(a)^2 = (a^l \boldsymbol{X}_l)(a^h \boldsymbol{X}_h) = (\boldsymbol{X}_l \boldsymbol{X}_h) a^l a^h,$$

也就是

$$(a)^2 = g_{lh} a^l a^h.$$

切于曲面的两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 由形式 $\boldsymbol{a} = a^h \boldsymbol{X}_h$, $\boldsymbol{b} = b^h \boldsymbol{X}_h$ 表示出来，它們的内积是

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a^l \boldsymbol{X}_l)(b^h \boldsymbol{X}_h) = (\boldsymbol{X}_l \boldsymbol{X}_h) a^l b^h = g_{lh} a^l b^h,$$

所以，它們所成的角 θ 由下式确定：

$$\cos\theta = \frac{g_{lh} a^l b^h}{\sqrt{g_{lh} a^l a^h} \sqrt{g_{lh} b^l b^h}}.$$

与切于曲面的两个向量 $\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{X}_2$ 同时垂直且和两者組成象右旋坐标系那样关系的单位向量以 $\boldsymbol{N}$ 表示，这向量叫做曲面的**单位法綫**。这就是說

$$\boldsymbol{X}_1 \cdot \boldsymbol{N} = 0, \ \boldsymbol{X}_2 \cdot \boldsymbol{N} = 0, \ \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{N} = 1.$$

由于向量 X_1, X_2 的长各为 $\sqrt{g_{11}}$, $\sqrt{g_{22}}$, 它們所成的角 θ 由 $\cos\theta=\dfrac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$ 所确定,所以 X_1 和 X_2 作成的平行四边形的面积是

$$\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}\sin\theta=\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{g_{11}g_{22}}\sqrt{1-\frac{g_{12}^2}{g_{11}g_{22}}}=\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}=\sqrt{g},$$

因此,如用外积形式的話,則 N 可表为

$$N=\frac{1}{\sqrt{g}}(X_1\times X_2).$$

如用习惯的写法,則 N 的支量(坐标)用 X, Y, Z 表示,从上式得出

$$X=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(y_uz_v-y_vz_u),$$

$$Y=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(z_ux_v-z_vx_u),$$

$$Z=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(x_uy_v-x_vy_u).$$

§36 基本方程

在曲面 $X=X(u^1, u^2)$ 上的各点,以切于曲面的两个綫性无关向量 X_1 与 X_2 以及垂直于它們且和它們构成右旋坐标系那样关系的单位法綫 N 結合起来。这些向量当然是綫性无关的。事实上,从以上 N 的表达式就可証明

$$[X_1X_2N]=\sqrt{g},$$

因而可得出以上的結論。

作 X_i 关于 u^j 的偏微分,所得的向量 ∂_jX_i 当然可用上面三个向量的綫性組合

$$\partial_jX_i=\Gamma_{ji}^hX_h+H_{ji}N$$

表示出来。首先，我們来确定 Γ^h_{ji}。

作

$$g_{ia}=\boldsymbol{X}_i\cdot\boldsymbol{X}_a$$

的两边关于 u^j 的偏微分，得

$$\partial_j g_{ia}=(\partial_j\boldsymbol{X}_i)\cdot\boldsymbol{X}_a+\boldsymbol{X}_i\cdot(\partial_j\boldsymbol{X}_a),$$

在这里，用前面的式子代进且注意到 $\boldsymbol{X}_i\cdot\boldsymbol{N}=0$，則有

$$\partial_j g_{ia}=\Gamma^b_{ji}\boldsymbol{X}_b\cdot\boldsymbol{X}_a+\boldsymbol{X}_i\cdot\Gamma^b_{ja}\boldsymbol{X}_b,$$

因而

$$\partial_j g_{ia}=\Gamma^b_{ji}g_{ba}+\Gamma^b_{ja}g_{ib}.$$

从此利用和前一章完全同样的方法，就可得出

$$\Gamma^h_{ji}=\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}g^{ha}(\partial_j g_{ia}+\partial_i g_{ja}-\partial_a g_{ji}).$$

这就是說 Γ^h_{ji} 是由 g_{ji} 所成的 Christoffel 記号。

这个$\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}$如用习惯的写法写出来，則經計算得到

$$\begin{Bmatrix}1\\11\end{Bmatrix}=\frac{GE_u-2FF_u+FE_v}{2(EG-F^2)},\quad \begin{Bmatrix}1\\12\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\21\end{Bmatrix}=\frac{GE_v-FG_u}{2(EG-F^2)},$$

$$\begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}=\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2(EG-F^2)},\quad \begin{Bmatrix}2\\11\end{Bmatrix}=\frac{2EF_u-EE_v-FE_u}{2(EG-F^2)},$$

$$\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\21\end{Bmatrix}=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG-F^2)},\quad \begin{Bmatrix}2\\22\end{Bmatrix}=\frac{EG_v-2FF_v+FG_u}{2(EG-F^2)}.$$

其次要計算 H_{ji}。对于曲面上一点 $\boldsymbol{X}(u^1, u^2)$，取非常接近于它的点 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}_i du^i+\frac{1}{2}(\partial_j\boldsymbol{X}_i)du^j du^i$，从这点引至 $\boldsymbol{X}$ 点处，切平面的垂綫长由式

$$\left[\boldsymbol{X}_i du^i+\frac{1}{2}(\partial_j\boldsymbol{X}_i)du^j du^i\right]\boldsymbol{N}=\frac{1}{2}H_{ji}du^j du^i$$

所給出。这里出現的

$$H_{ji}du^j du^i$$

我們称之为第二基本形式。这个形式又可写成

$$H_{ji}du^j du^i = (\partial_j \boldsymbol{X}_i)\boldsymbol{N} du^j du^i$$
$$= -(\boldsymbol{X}_i \cdot \partial_j \boldsymbol{N}) du^j du^i = -d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{N}.$$

如用习惯的写法，則

$$H_{11} = L,\ H_{12} = H_{21} = M,\ H_{22} = N,$$

第二基本形式可表示成

$$H_{ji}du^j du^i = Ldu^2 + 2Mdu\,dv + Ndv^2.$$

由上式知道

$$Ldu^2 + 2Mdu\,dv + Ndv^2 = -dx\,dX - dy\,dY - dz\,dZ,$$

因此，可利用由前节公式求得的 X, Y, Z 而計算出 L, M, N，这时，就得出

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix},$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix},$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_u \end{vmatrix}.$$

象这样求得的方程

$$\partial_j \boldsymbol{X}_i = \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} \boldsymbol{X}_h + H_{ji}\boldsymbol{N},$$

我們称之为 Gauss 方程。

$\boldsymbol{N}$ 对于 u^i 偏微分后，所得的 $\partial_i \boldsymbol{N}$ 可应用三个綫性无关向量 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{N}$ 的綫性組合

$$\partial_j \boldsymbol{N} = K_j{}^h \boldsymbol{X}_h + L_j \boldsymbol{N}$$

表示出来。但这里的 L_j 是 0。这是因为，在 $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N} = 1$ 对于 u^j 偏微

分而得到的$(\partial_j N)N=0$里，以上式代入的話，即可知$L_j=0$。在$X_i\cdot N=0$对于u^j偏微分后而得出的式$(\partial_j X_i)\cdot N+X_i\cdot\partial_j N=0$内，以 Gauss 方程及上一式代进的話，就有

$$H_{ji}+X_i(K_j^{\cdot h}X_h)=0,$$

亦即

$$H_{ji}+K_j^{\cdot h}g_{ih}=0,$$

因而得到

$$K_j^{\cdot h}=-H_{ji}g^{ih}=-H_j^{\cdot h}.$$

因此，我們最后得出这样一个方程

$$\partial_j N=-H_j^{\cdot h}X_h.$$

我們称这个方程为 **Weingarten 方程**。

由

$$(\partial_j N)(\partial_i N)=N_{ji}$$

所成的二次形式

$$N_{ji}du^j du^i$$

有时叫做**第三基本形式**。如利用 Weingarten 方程計算 N_{ji}，則有

$$N_{ji}=(\partial_j N)(\partial_i N)=(-H_j^{\cdot b}\cdot X_b)(-H_i^{\cdot a}\cdot X_a)$$
$$=H_j^{\cdot b}H_i^{\cdot a}\cdot X_b X_a,$$

因此，得到

$$N_{ji}=H_j^{\cdot b}H_i^{\cdot a}g_{ba},$$

或

$$N_{ji}=H_{jb}H_{ia}g^{ba}.$$

§ 37 Gauss 与 Codazzi 方程

Gauss 方程

$$\partial_j X_i=\left\{ {h \atop ji} \right\}X_h+H_{ji}N$$

的两边关于 u^k 偏微分时，有

$$\partial_k\partial_j \boldsymbol{X}_i=\left(\partial_k\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}\right)\boldsymbol{X}_h+\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}(\partial_k\boldsymbol{X}_a)$$
$$+(\partial_k H_{ji})\boldsymbol{N}+H_{ji}(\partial_k\boldsymbol{N}),$$

用 Gauss 方程与 Weingarten 方程代替上式中的有关项，则得

$$\partial_k\partial_j\boldsymbol{X}_i=\left(\partial_k\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}\right)\boldsymbol{X}_h+\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}\left[\begin{Bmatrix}h\\ka\end{Bmatrix}\boldsymbol{X}_h+H_{ka}\boldsymbol{N}\right]$$
$$+(\partial_k H_{ji})\boldsymbol{N}-H_{ji}H_k^{\cdot h}\boldsymbol{X}_h,$$

亦即

$$\partial_k\partial_j\boldsymbol{X}_i=\left[\partial_k\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}h\\ka\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}-H_k^{\cdot h}H_{ji}\right]\boldsymbol{X}_h$$
$$+\left[\partial_k H_{ji}+\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}H_{ka}\right]\boldsymbol{N}.$$

在这式里，交换 k 与 j 而得到另一式，两者相减，由于左边等于 0，故得

$$\left[\partial_k\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}-\partial_j\begin{Bmatrix}h\\ki\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}h\\ka\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}h\\ja\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ki\end{Bmatrix}\right.$$
$$\left.-H_k^{\cdot h}H_{ji}+H_j^{\cdot h}H_{ki}\right]\boldsymbol{X}_h+\left[\partial_k H_{ji}-\partial_j H_{ki}\right.$$
$$\left.+\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}H_{ka}-\begin{Bmatrix}a\\ki\end{Bmatrix}H_{ja}\right]\boldsymbol{N}=0.$$

但因 $\boldsymbol{X}_h$ 和 $\boldsymbol{N}$ 是綫性无关的，所以

$$\partial_k\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}-\partial_j\begin{Bmatrix}h\\ki\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}h\\ka\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}h\\ja\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ki\end{Bmatrix}$$
$$=H_k^{\cdot h}H_{ji}-H_j^{\cdot h}H_{ki},$$
$$\partial_k H_{ji}-\partial_j H_{ki}+\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}H_{ka}-\begin{Bmatrix}a\\ki\end{Bmatrix}H_{ja}=0.$$

因此如以

$$K_{kji}^{\cdots h}=\partial_k\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}-\partial_j\begin{Bmatrix}h\\ki\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}h\\ka\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}h\\ja\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ki\end{Bmatrix},$$

$$\nabla_k H_{ji}=\partial_k H_{ji}-\begin{Bmatrix}a\\kj\end{Bmatrix}H_{ai}-\begin{Bmatrix}a\\ki\end{Bmatrix}H_{ja},$$

则得出下面两个式子

$$K_{kji}^{\cdots h}=H_k^{\cdot h}H_{ji}-H_j^{\cdot h}H_{ki},$$

$$\nabla_k H_{ji}-\nabla_j H_{ki}=0.$$

这两个式子分别称为 **Gauss 方程与 Godazzi 方程。**

对于 Weingarten 方程

$$\partial_j \boldsymbol{N}=-H_j^{\cdot i}\boldsymbol{X}_i,$$

作关于 u^k 的偏微分，则得

$$\partial_k\partial_j \boldsymbol{N}=-(\partial_k H_j^{\cdot i})\boldsymbol{X}_i-H_j^{\cdot a}\partial_k \boldsymbol{X}_a.$$

在这式里用 Gauss 方程代入，有

$$\partial_k\partial_j \boldsymbol{N}=-(\partial_k H_j^{\cdot i})\boldsymbol{X}_i-H_j^{\cdot a}\left(\begin{Bmatrix}i\\ka\end{Bmatrix}\boldsymbol{X}_i+H_{ka}\boldsymbol{N}\right),$$

即有

$$\partial_k\partial_j \boldsymbol{N}=-\left(\partial_k H_j^{\cdot i}+\begin{Bmatrix}i\\ka\end{Bmatrix}H_j^{\cdot a}\right)\boldsymbol{X}_i-H_{ka}H_j^{\cdot a}\boldsymbol{N}.$$

在这式内使指标 k 与 j 互相交换而得到另一式，然后将两式相减，就有

$$-\left(\partial_k H_j^{\cdot i}-\partial_j H_k^{\cdot i}+\begin{Bmatrix}i\\ka\end{Bmatrix}H_j^{\cdot a}-\begin{Bmatrix}i\\ja\end{Bmatrix}H_k^{\cdot a}\right)\boldsymbol{X}_i=0.$$

但 $\boldsymbol{X}_i$ 是綫性无关的，所以得到

$$\partial_k H_j^{\cdot i}-\partial_j H_k^{\cdot i}+\begin{Bmatrix}i\\ka\end{Bmatrix}H_j^{\cdot a}-\begin{Bmatrix}i\\ja\end{Bmatrix}H_k^{\cdot a}=0.$$

今以

$$\nabla_k H_j^{\cdot i}=\partial_k H_j^{\cdot i}+\begin{Bmatrix}i\\ka\end{Bmatrix}H_j^{\cdot a}-\begin{Bmatrix}a\\kj\end{Bmatrix}H_a^{\cdot i},$$

则上式可写成

$$\nabla_k H_j^{\cdot i}-\nabla_j H_k^{\cdot i}=0.$$

因为 $\nabla_k g_{ji}=0$，所以上面的式子和

$$\nabla_k H_{ji} - \nabla_j H_{ki} = 0$$

是等价的，这就是 Codazzi 方程。

从以上的計算看来，Gauss 与 Codazzi 方程就是曲面基本方程的可积条件。

設 $$K_{kjih} = K_{kji}^{\cdots a} g_{ah},$$

則容易証明，这里出现的 K_{kjih} 满足

$$K_{kjih} = -K_{jkih}, \quad K_{kjih} = -K_{kjhi},$$

$$K_{kjih} = K_{ihkj}, \quad K_{kjih} + K_{jikh} + K_{ikjh} = 0.$$

Gauss 方程可改写成

$$K_{kjih} = H_{kh} H_{ji} - H_{jh} H_{ki}.$$

因 K_{kjih} 里面不等于 0 的量，实质上只有 K_{1212}，所以

$$K_{1212} = H_{12} H_{21} - H_{11} H_{22} = M^2 - LN.$$

对这样一个式子，試求它的意义。

在曲面上一点 P，作一个包含 P 点法綫 N 的平面，在这个平面和曲面相截而成的截曲綫上取接近于 P 的一点 P'. 由 P' 引 $P'H$ 垂直于这个平面和在点 P 的切平面所成的交綫。这样一来，截曲綫在点 P 的曲率 k 显然可由

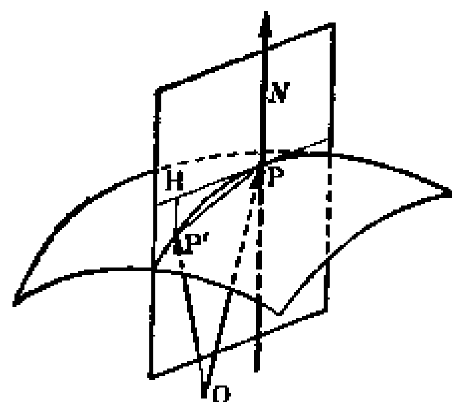


图 37.1

$$\frac{2P'H}{PP'^2}$$

的极限給出❶。設原点为 O, $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{X}$, $\overrightarrow{OP'} = \boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X}$, 由于

$$2P'H = H_{ji} du^j du^i, \quad PP'^2 = g_{ji} du^j du^i,$$

---

❶ 事实上，作过 P' 的切綫，設此切綫与 HP 的交角为 $\Delta\alpha$，則

$$k = \lim \frac{\Delta\alpha}{PP'},$$

但 $\Delta\alpha \sim 2\angle P'PH$，而 $\angle P'PH \sim \frac{P'H}{PP'}$，所以 k 为 $\frac{2P'H}{PP'^2}$ 的极限——譯者注。

于是得

$$k=\frac{H_{ji}du^j du^i}{g_{ji}du^j du^i}=\frac{L du^2+2M du\,dv+N dv^2}{E du^2+2F du\,dv+G dv^2}. \qquad (37.1)$$

这也就是

$$(L-kE)du^2+2(M-kF)du\,dv+(N-kG)dv^2=0,$$

因此，当 $du:dv$ 在(37.1)内变化时，k 的极大与极小值非满足联立方程

$$(L-kE)du+(M-kF)dv=0,$$
$$(M-kF)du+(N-kG)dv=0$$

不可。这就是說 k 的极大与极小值(簡称极值)应满足

$$\begin{vmatrix} L-kE & M-kF \\ M-kF & N-kG \end{vmatrix}=0,$$

換言之，k 的极值应是

$$(LN-M^2)-(LG+NE-2FM)k+(EG-F^2)k^2=0$$

的根。这个方程的两个根 k_1 与 k_2 称为曲面在点 P 的**主曲率**。从此推得

$$\frac{1}{2}(k_1+k_2)=\frac{LG-2FM+NE}{2(EG-F^2)},$$

$$k_1k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

这里的

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2),$$

我們称为曲面在点 P 的**平均曲率**或 **Germain 曲率**。

$$K=k_1k_2$$

称为**全曲率**或 **Gauss 曲率**。

以上的 $H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$ 又可写成

$$H=\frac{1}{2}g^{ji}H_{ji}. \tag{37.2}$$

还有 $K=k_1k_2$，因 $K_{1212}=M^2-LN$ 而可写成

$$K=-\frac{K_{1212}}{g}. \tag{37.3}$$

从 K_{kjih} 所滿足的性质以及(37.3)知道 K_{kjih} 也可写成

$$K_{kjih}=-Ke_{kj}e_{ih}.$$

把它代入 Gauss 方程

$$K_{kjih}=H_{kh}H_{ji}-H_{jh}H_{ki}$$

里去，則有

$$-Ke_{kj}e_{ih}=H_{kh}H_{ji}-H_{jh}H_{ki},$$

这式的两边乘以 g^{ki}，再經过縮約，并注意到 $g^{ki}e_{kj}e_{ih}=g_{jh}$，$g^{ki}H_{kh}H_{ji}=N_{jh}$，就得到

$$-Kg_{jh}=N_{jh}-2HH_{jh},$$

或

$$Kg_{jh}-2HH_{jh}+N_{jh}=0.$$

这是联系第一、第二、第三基本形式的一个关系式。

§38 測 地 綫

在曲面上給出曲綫 $u^i=u^i(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$，其長 s 由下式确定

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{g_{ji}\frac{du^j}{dt}\frac{du^i}{dt}}\,dt.$$

連結曲面上两定点 P, Q 的所有曲面曲綫中，使以上积分之值为极小的曲綫叫做曲面上的測地綫。如以

$$s=\int_{t_0}^{t_1}F(u,\dot{u})dt,\ F(u,\dot{u})=\sqrt{g_{ji}(u)\dot{u}^j\dot{u}^i},\quad \dot{u}^h=\frac{\partial u^h}{\partial t},$$

則表示它的微分方程由 Euler 微分方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^a}\right)-\frac{\partial F}{\partial u^a}=0$$

所給定。但由于

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^a}=\frac{1}{F}g_{ia}\dot{u}^i,\quad \frac{\partial F}{\partial u^a}=\frac{1}{2F}(\partial_a g_{ji})\dot{u}^j\dot{u}^i,$$

故 Euler 微分方程可写成

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{F}g_{ia}\dot{u}^i\right)-\frac{1}{2F}(\partial_a g_{ji})\dot{u}^j\dot{u}^i=0,$$

$$\frac{1}{F}g_{ia}\ddot{u}^i+\frac{1}{F}(\partial_j g_{ia})\dot{u}^j\dot{u}^i-\frac{1}{2F}(\partial_a g_{ji})\dot{u}^j\dot{u}^i-\frac{\frac{dF}{dt}}{F^2}g_{ia}\dot{u}^i=0,$$

$$g_{ia}\ddot{u}^i+\frac{1}{2}(\partial_j g_{ia}+\partial_i g_{ja}-\partial_a g_{ji})\dot{u}^j\dot{u}^i-\frac{\frac{dF}{dt}}{F}g_{ia}\dot{u}^i=0.$$

这式的两边乘以 g^{ha}，再关于 a 总和起来，利用 Christoffel 記号，則得

$$\frac{d^2u^h}{dt^2}+\left\{{h \atop ji}\right\}\frac{du^j}{dt}\frac{du^i}{dt}-\frac{\frac{dF}{dt}}{F}\frac{du^h}{dt}=0.$$

但因 $F=\dfrac{ds}{dt}$ 或 $F=\dfrac{1}{\frac{dt}{ds}}$，所以

$$\frac{\frac{dF}{dt}}{F}=-\frac{\frac{d^2t}{ds^2}}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2}.$$

把它代入上式，得出

$$\frac{d^2u^h}{dt^2}+\left\{{h \atop ji}\right\}\frac{du^j}{dt}\frac{du^i}{dt}+\frac{\frac{d^2t}{ds^2}}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2}\frac{du^h}{dt}=0,$$

$$\frac{d^2u^h}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\frac{du^h}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}+\left\{{h \atop ji}\right\}\frac{du^j}{dt}\frac{du^i}{dt}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=0,$$

$$\frac{d^2u^h}{ds^2}+\left\{{h \atop ji}\right\}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}=0.$$

这个式子就是曲面上测地綫的微分方程。

§ 39 Meusnier 定理

設曲面上給定一曲綫 $u^h=u^h(s)$，表示曲面上点的位置向量 $\boldsymbol{X}$ 有形式 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(u(s))$，因此它也是 s 的函数。将这个函数对 s 継續二次微分，有

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{ds}=\frac{du^h}{ds}\boldsymbol{X}_h,$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^2}=\left(\frac{d^2u^h}{ds^2}+\left\{{h \atop ji}\right\}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}\right)\boldsymbol{X}_h+H_{ji}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}\boldsymbol{N}. \tag{39.1}$$

这里的 $\frac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^2}$ 是当这条曲綫看成空間曲綫时，以主法綫的方向为方向，其长等于 k 的一个向量，这向量在法綫方向的支量卽

$$H_{ji}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}\boldsymbol{N}$$

称做是这条曲綫的**法曲率向量**，其长

$$k_n=H_{ji}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}$$

叫做**法曲率**。

对于曲面上的測地綫，由(39.1)得出

$$\frac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^2}=H_{ji}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}\boldsymbol{N}. \tag{39.2}$$

这里如 $H_{ji}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}=0$，那么，这条曲綫是直綫。如

$$H_{ji}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}\neq 0,$$

这条曲綫的曲率向量垂直于曲面。

反之，如曲面上的曲綫是直綫，或者其曲率向量垂直于曲面时，則这曲綫一定是測地綫。因此，有如下的定理。

定理 曲面上的曲綫是測地綫的必要与充分条件是：它或为直綫，或其曲率向量垂直于曲面。

曲率向量垂直于曲面这一事实也可說成是曲面法綫包含于密切平面内。

以上我們提到对于曲面上的測地綫，式(39.2)成立，这式右边的法曲率向量其实只单独由曲綫的切綫方向 $\frac{du^h}{ds}$ 所决定。因此，以下定理成立。

定理 曲面曲綫在一点的法曲率向量等于在这一点和这曲綫相切的測地綫之法曲率向量。

平面上的測地綫常是直綫，因此，$H_{ji}=0$。反之，如 $H_{ji}=0$，則其上之測地綫常是直綫，因而曲面成为平面了。于是，得到下一定理。

定理 曲面成为平面的必要充分条件是 $H_{ji}=0$。

因为对于平面有 $H_{ji}=0$，所以由 Gauss 方程

$$K_{kji}^{\cdots h}=H_k^{\cdot h}H_{ji}-H_j^{\cdot h}H_{ki}$$

即知这时 $K_{kji}^{\cdots h}=0$，于是有

定理 对于平面有 $K_{kji}^{\cdots h}=0$。

反之，假設我們所要討論的曲面滿足 $K_{kji}^{\cdots h}=0$。

应用和前章完全同样的方法，可以証明当曲綫坐标有变换

$$u^{h'}=f^{h'}(u^1, u^2)$$

时，Christoffel 記号$\left\{ {h \atop ji} \right\}$的变换法則是

$$A_h^{h'}\left\{ {h \atop ji} \right\}=A_j^{j'}A_i^{i'}\left\{ {h' \atop j'i'} \right\}+\partial_j A_i^{h'}\quad (A_i^{h'}=\partial_i f^{h'}),$$

我們对这里以$\left\{ {h' \atop j'i'} \right\}=0$而得到的方程

$$\frac{\partial^2 u^{h'}}{\partial u^j \partial u^i}=\left\{ {h \atop ji} \right\}\frac{\partial u^{h'}}{\partial u^h} \tag{39.3}$$

加以討論。把这式看做是关于 $u^{h'}$ 的偏微分方程，它的完全可积条件是

$$\partial_k\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}-\partial_j\begin{Bmatrix}h\\ki\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}h\\ka\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}h\\ja\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ki\end{Bmatrix}=0,$$

如 $K_{kji}{}^{h}=0$，这个条件是满足的。

因此，如 $K_{kji}{}^{h}=0$，則使(39.3)成立的变数 $u^{h'}=f^{h'}(u^1, u^2)$ 是存在的，也就是說，在坐标系 $(u^{h'})$ 之下，$\begin{Bmatrix}h'\\j'i'\end{Bmatrix}=0$ 是成立的。但因

$$\frac{\partial g_{j'i'}}{\partial u^{k'}}-\begin{Bmatrix}a'\\k'j'\end{Bmatrix}g_{a'i'}+\begin{Bmatrix}a'\\k'i'\end{Bmatrix}g_{j'a'}=0,$$

所以在这种坐标系下，$g_{j'i'}=$常数，因而，$ds^2=g_{j'i'}du^{j'}du^{i'}$ 和平面上的綫素一致，于是作为討論对象的曲面是可展曲面。

反之，对于可展曲面，容易知道有 $K_{kji}{}^{h}=0$，因此，有定理如下。

定理 曲面成为可展的必要充分条件是 $K_{kji}{}^{h}=0$（或 $K=0$）。

在方程

$$\frac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^2}=\left(\frac{d^2u^h}{ds^2}+\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}\right)\boldsymbol{X}_h+H_{ji}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}\boldsymbol{N} \quad (39.4)$$

里，$\frac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^2}$ 的长是曲綫的曲率 k，$\left(\frac{d^2u^h}{ds^2}+\begin{Bmatrix}h\\ji\end{Bmatrix}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}\right)\boldsymbol{X}_h$ 之长是測地曲率 k_g，$H_{ji}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}$ 是法曲率 k_n，它們之間有关系

$$k^2=k_g^2+k_n^2.$$

因为有 $\frac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^2}=k\boldsymbol{n}$，如 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 所成的角，亦卽曲面曲綫的主法綫和曲面法綫所成之角为 θ，則由(39.4)卽得

$$k_n=k\cos\theta.$$

因此，有以下的 Meusnier 定理。

定理 曲面曲綫的曲率 k，法曲率 k_n，主法綫和曲面法綫所成的角 θ 間有关系 $k_n=k\cos\theta$。

§40　曲　率　綫

由于在曲面一点处沿 du^h 方向的曲綫法曲率是由

$$k_n=\frac{H_{ji}du^jdu^i}{g_{ji}du^jdu^i}$$

所給定的，所以决定 k_n 的极值 $\frac{1}{R}$ 的方向非滿足

$$\left(H_{ji}-\frac{1}{R}g_{ji}\right)du^i=0$$

不可。滿足这一条件的方向我們称之为**主方向**，由主方向决定的法曲率称为**主曲率**。如果

$$H_{ji}=\frac{1}{R}g_{ji},$$

則主方向是不定的，主方向不定的点叫做臍点(umbilic)。

不同的主曲率 $\frac{1}{R_1}$，$\frac{1}{R_2}$ 所对应的主方向設为 d_1u^h，d_2u^h，則由于

$$\left(H_{ji}-\frac{1}{R_1}g_{ji}\right)d_1u^i=0,\quad \left(H_{ji}-\frac{1}{R_2}g_{ji}\right)d_2u^i=0,$$

而有

$$\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)g_{ji}d_2u^jd_1u^i=0,$$

这也就是

$$g_{ji}d_2u^jd_1u^i=0.$$

这式子的意义是对应于不同主曲率的两个主方向是正交的。由上面的式子又得到

$$H_{ji}d_2u^jd_1u^i=0.$$

設以这样的主方向为方向的两个单位向量为 v_1^h，v_2^h，則有

$$g_{ji}v_1^jv_2^i=0,\quad H_{ji}v_1^jv_2^i=0,$$

而任意的单位向量 v^h 可写做

$$v^h = v_1^h \cos\theta + v_2^h \sin\theta,$$

这里的 θ 是 v^h 和 v_1^h 所成的角。由于对应于方向 v^h 的法曲率是由 $\frac{1}{R} = H_{ji} v^j v^i$ 給定的，所以

$$\frac{1}{R} = H_{ji} v^j v^i = H_{ji}(v_1^j \cos\theta + v_2^j \sin\theta)(v_1^i \cos\theta + v_2^i \sin\theta)$$
$$= (H_{ji} v_1^j v_1^i)\cos^2\theta + (H_{ji} v_2^j v_2^i)\sin^2\theta,$$

由此就得出

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{R_1} + \frac{\sin^2\theta}{R_2}.$$

这就是所謂的 **Euler** 公式。

沿着主方向的曲綫，也就是說满足

$$\left(H_{ji} - \frac{1}{R} g_{ji}\right)\frac{du^j}{ds} = 0$$

的曲綫称为**曲率綫**。

上式又可写成

$$\boldsymbol{H}_j^{\cdot h} \frac{du^j}{ds} = \frac{1}{R} \frac{du^h}{ds}.$$

另一方面，在 Weingarten 方程

$$\partial_j \boldsymbol{N} = -H_j^{\cdot h} \boldsymbol{X}_h$$

的两边各乘以 $\frac{du^j}{ds}$，再对指标 j 进行縮約，則

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{ds} = -H_j^{\cdot h} \frac{du^j}{ds} \boldsymbol{X}_h = -\frac{1}{R} \frac{du^h}{ds} \boldsymbol{X}_h = -\frac{1}{R} \frac{d\boldsymbol{X}}{ds},$$

因此，对于曲率綫，就有下式成立

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{ds} + \frac{1}{R} \frac{d\boldsymbol{X}}{ds} = 0.$$

这一式叫做 **Rodrigues** 公式。

§41 漸 近 曲 綫

曲面上满足

$$H_{ji}d_2u^jd_1u^i=0$$

的两个方向 d_1u^h 与 d_2u^h 称做是互为**共轭**的方向。特别是那个和本身共轭的方向，卽满足

$$H_{ji}du^jdu^i=0$$

的方向叫做**漸近方向**。沿着漸近方向的曲綫，卽满足

$$H_{ji}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}=0$$

的曲綫叫做**漸近曲綫**。

对于漸近曲綫，公式(39.4)，卽

$$\frac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^2}=\left(\frac{d^2u^h}{ds^2}+\begin{Bmatrix}h\\ ji\end{Bmatrix}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}\right)\boldsymbol{X}_h+H_{ji}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}\boldsymbol{N}$$

可写成

$$\frac{d^2\boldsymbol{X}}{ds^3}=\left(\frac{d^3u^h}{ds^2}+\begin{Bmatrix}h\\ ji\end{Bmatrix}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}\right)\boldsymbol{X}_h.$$

比較这个式子两边的向量之長，卽有

$$k=k_g,$$

因此，有

定理 漸近曲綫的曲率等于測地曲率。

再者，上面的式子表示出曲綫的主法綫和曲面相切，因此有

定理 漸近曲綫的密切平面与曲面的切平面一致。

从此推知漸近曲綫的副法綫与曲面法綫一致，那就是

$$\boldsymbol{b}=\pm\boldsymbol{N}.$$

对这个等式沿着曲綫微分，则有

$$-\tau\boldsymbol{n}=\pm(\partial_j\boldsymbol{N})\frac{\partial u^j}{ds}=\mp H_j^{\ h}\frac{du^j}{ds}\boldsymbol{X}_h,$$

比較两边向量之长的平方，得

$$(\tau)^2 = H_j^{\cdot b} H_i^{\cdot a} g_{ba} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} = N_{ji} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds}.$$

但由于

$$K g_{ji} - 2H H_{ji} + N_{ji} = 0,$$

所以

$$K - 2H H_{ji} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} + N_{ji} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} = 0.$$

因此，对于漸近曲綫有

$$(\tau^2) = -K,$$

这也就是

$$\tau = \pm\sqrt{-K},$$

于是有如下的定理。

定理 漸近曲綫的撓率等于 $\pm\sqrt{-K}$。

这叫做 **Enneper** 定理。

第 9 章　Riemann 空間

§ 42　Riemann 空間

上面提到的曲面是二維 **Riemann 空間**的一个例。至于一般 n 維 Riemann 空間，我們将按照下述的方式来給以定义。

首先，把空間考慮为元素的集，其中有子集 $U, V, W, \cdots$，由这些子集所成的集假設滿足如下的条件：

（i）对于空間的任意一元素 p，在集中至少有这样一个子集 U，使 $p \in U$（p 含于 U 内）。

（ii）对于空間的任意两个不同的元素 p 与 q，在集中有这样一个子集 U，使 $p \in U$ 但 $q \bar{\in} U$（q 不含于 U 内）。

（iii）如有两个子集 U 与 V 包含元素 p，則被包含于 U, V 的共同部分而又包含 p 的子集 W 在这集中存在。

滿足这些条件的空間叫做**拓扑空間**，在这样定义的拓扑空間中，那些包含各点的子集称为各点的**邻域**。这些邻域复盖着拓扑空間。

如果一个拓扑空間为某一个邻域所成的集所复盖着，假設每一个邻域和 n 維 Euclid 空間的球内部做成 1 对 1、双連續的点对应，那么，邻域内的每一个点对应于 Euclid 空間球内的点，因此邻域内的每一个点对应于其在 Euclid 空間球内对应点的坐标 $(u^1, u^2, \cdots, u^n)$. 这时，我們說对于这个拓扑空間导进了坐标系，有坐标的邻域称做坐标邻域。假使拓扑空間内一个点被两个坐标邻域复盖着，也就是說，这个点同时属于两个坐标邻域，那么，对于同一点当然有 Euclid 空間内的两个坐标系 (u^h) 与 $(u^{h'})$ 和它对应着。

在这情况下，如 u^h 与 $u^{h'}$ 常为 C^r 級(即 r 次可微，且第 r 次的偏微分是連續的)的函数，而且它們之間有函数行列式不等于0，即

$$u^{h'}=f^{h'}(u^1, u^2, \cdots, u^n), \quad \left|\frac{\partial f^{h'}}{\partial u^h}\right| \neq 0 \qquad (42.1)$$

的函数关系联系着，这时称这个拓扑空間是 **C^r 級的 n 維流形**(n-dimensional manifold of class C^r)。

在 C^r 級的 n 維流形中，每个坐标邻域內設有两点 $P(u^h)$ 与 $P'(u^h+du^h)$，它們的距离是一个数量 ds，这个数量 ds 是以 C^{r-1} 級的函数 $g_{ji}(u)$ 为系数、坐标微分 du^h 的正値二次形式

$$ds^2=g_{ji}(u)du^jdu^i$$

所定义的，这时，这个 C^r 級的 n 維流形称为 **C^r 級的 n 維 Riemann 空間**，上举的那个二次形式叫做**基本度量二次形式**(fundamental metric quadratic form)。

§43 向 量

Riemann 空間內关于数量、向量、張量等的定义可仿照以前累次提到的那样来規定。

(1) 数量：它是一个量，在各个坐标系下，它以一个数来表示，如关于坐标系(u^h)，$(u^{h'})$的数分別記以 f, f'，它們之間常以

$$f'=f$$

这样的关系結合着，这样一个量叫做数量。这时，f 与 f' 称做它关于坐标系(u^h)与$(u^{h'})$的支量。数量的支量在空間內各点都已規定时，它就称为一个数量場。

定义 Riemann 空間度量的 ds 就是一个数量。

(2) 向量：它是一个量，在各个坐标系下，它以 n 个数来表示，如关于坐标系(u^h)，$(u^{h'})$的数分別以 v^h, $v^{h'}$ 表示，它們之間常以

$$v^{h'}=A_h^{h'}v^h \qquad (A_h^{h'}=\partial_h u^{h'})$$

这样的关系結合时，称它是一个逆变向量。这时，v^h 与 $v^{h'}$ 称为这个逆变向量关于坐标系 (u^h) 与 $(u^{h'})$ 的支量。逆变向量的支量在空間内各点都已規定时，它就称为一个逆变向量場。

坐标的微分 du^h 就是一个逆变向量。

还有，一个量在各个坐标系下，以 n 个数来表示，如关于坐标系 (u^h)，$(u^{h'})$ 的数分别以 w_i，$w_{i'}$ 表示，它們之間常以

$$w_{i'}=A_{i'}^i w_i \qquad (A_{i'}^i=\partial_{i'}u^i)$$

这样的关系結合时，称它是一个协变向量。这时，w_i 与 $w_{i'}$ 称为这个协变向量关于坐标系 (u^h) 与 $(u^{h'})$ 的支量。协变向量的支量在空間内各点都已規定时，它就称为一个协变向量場。

数量場 $f(u)$ 的偏微分 $\partial_i f$ 就是一个协变向量場。

§44 張　　量

它是一个量，在各个坐标系下，例如說以 n^3 个数来表示，如关于坐标系 (u^h)，$(u^{h'})$ 的数分别以 $T_{ji}^{\cdot\cdot h}$，$T_{j'i'}^{\cdot\cdot h'}$ 表示，它們之間常以

$$T_{j'i'}^{\cdot\cdot h'}=A_{j'}^j A_{i'}^i A_h^{h'} T_{ji}^{\cdot\cdot h}$$

这样的关系結合时，称它是逆变一阶、协变二阶的張量。这时，$T_{ji}^{\cdot\cdot h}$ 与 $T_{j'i'}^{\cdot\cdot h'}$ 称为这个張量关于坐标系 (u^h) 与 $(u^{h'})$ 的支量。張量的支量在空間内各点都已規定时，它就叫做一个張量場。

协变0阶的張量是逆变張量，逆变0阶的張量是协变張量。

基本二次形式的系数 g_{ji} 是一个协变張量的支量。

張量 $T_{ji}^{\cdot\cdot h}$ 如滿足条件

$$T_{ji}^{\cdot\cdot h}=T_{ij}^{\cdot\cdot h}$$

时，則称它关于 j，i 是对称的，如滿足

$$T_{ji}^{\cdot\cdot h}=-T_{ij}^{\cdot\cdot h}$$

时，則称它关于 j，i 是反称的。

对于張量,可規定如次的运算。

(1) 加法：对于同类的張量,例如 $R_{ji}^{\cdot\cdot h}$ 与 $S_{ji}^{\cdot\cdot h}$，以对应支量之和作为支量的張量,卽

$$R_{ji}^{\cdot\cdot h}+S_{ji}^{\cdot\cdot h}=T_{ji}^{\cdot\cdot h}$$

称为 $R_{ji}^{\cdot\cdot h}$ 与 $S_{ji}^{\cdot\cdot h}$ 之和。

(2) 减法：和以上同样地可規定同类的两个張量之差。

(3) 乘法：对于两个張量,例如 R_{kj} 与 $S_{i}^{\cdot h}$，以其支量之积

$$R_{kj}S_{i}^{\cdot h}=T_{kji}^{\cdot\cdot\cdot h}$$

作为支量的張量称为这两个張量之积。

(4) 縮約：对于一个張量,例如 $R_{kji}^{\cdot\cdot\cdot h}$，使它的逆变指标 h 和一个协变指标 k 相等,因而总和起来

$$R_{aji}^{\cdot\cdot\cdot a}=R_{ji},$$

以这样的 R_{ji} 作为支量的張量,这項操作称为 $R_{kji}^{\cdot\cdot\cdot h}$ 关于 h 与 k 的縮約。

設 v^h 是一个逆变向量,則

$$g_{ji}v^jv^i$$

是一个正的数量，以它定义逆变向量 v^h 之长的平方。再設 v^h 与 w^h 是两个逆变向量,則

$$g_{ji}v^jw^i$$

是一个数量,以它定义两个逆变向量 v^h 与 w^h 的內积。又因为

$$\frac{g_{ji}v^jw^i}{\sqrt{g_{ji}v^jv^i}\sqrt{g_{ji}w^jw^i}}$$

的絕对值不超过 1，所以把它拿来定义这两个向量的交角 θ 之余弦 $\cos\theta$。

現以 $$g_{ji}v^j=v_i,\quad g_{ji}w^j=w_i,$$

則 v_i 与 w_i 都是协变向量,它們的长与內积可写成

$$g_{ji}v^jv^i=v_iv^i,\quad g_{ji}v^jw^i=v_iw^i.$$

还有，例如由張量 $T_{ji}^{\cdot\cdot h}$ 可規定

$$T_{jih}=T_{ji}^{\cdot\cdot a}g_{ah},\quad T_{j}^{\cdot ih}=T_{ja}^{\cdot\cdot h}g^{ai},$$

以这种方式从一个張量定出另外的張量，称它們是互为相伴的張量。

§45 Levi-Civita 平行性

在三維 Euclid 空間中的曲面上，考虑点 $\boldsymbol{X}$ 的切綫向量 $\boldsymbol{v}=v^h\boldsymbol{X}_h$，如前所述，它的微分是

$$d\boldsymbol{v}=\left(dv^h+\begin{Bmatrix}h\\ ji\end{Bmatrix}du^jv^i\right)\boldsymbol{X}_h+H_{ji}du^jv^i\boldsymbol{N},$$

作向量 $\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v}$ 在点 $\boldsymbol{X}$ 的切平面上的垂直射影，則有

$$\boldsymbol{v}+\left(dv^h+\begin{Bmatrix}h\\ ji\end{Bmatrix}du^jv^i\right)\boldsymbol{X}_h.$$

因此，如

$$\delta v^h=dv^h+\begin{Bmatrix}h\\ ji\end{Bmatrix}du^jv^i=0$$

时，则这个垂直射影和原来的向量 $\boldsymbol{v}$ 成为平行。

切于曲面的向量 $v^h\boldsymbol{X}_h$ 与 $v^h\boldsymbol{X}_h+d(v^h\boldsymbol{X}_h)$ 滿足上式时，則称它們在曲面上平行。这样定义的平行称为 **Levi-Civita 平行性**。

把这項概念扩充，在 Riemann 空間内就可以象下面那样地来定义向量与張量的协变微分与协变导数。

对于数量 f，逆变向量 v^h，协变向量 w_i，張量 $T_{ji}^{\cdot\cdot h}$，分别称

$$\delta f=df,$$

$$\delta v^h=dv^h+\begin{Bmatrix}h\\ ji\end{Bmatrix}du^jv^i,$$

$$\delta w_i=dw_i-\begin{Bmatrix}h\\ ji\end{Bmatrix}du^jw_h,$$

$$\delta T_{ji}^{\cdot\cdot h}=dT_{ji}^{\cdot\cdot h}+\begin{Bmatrix}h\\ ka\end{Bmatrix}du^kT_{ji}^{\cdot\cdot a}-\begin{Bmatrix}a\\ kj\end{Bmatrix}du^kT_{ai}^{\cdot\cdot h}-\begin{Bmatrix}a\\ ki\end{Bmatrix}du^kT_{ja}^{\cdot\cdot h}$$

为它們的协变微分，称

$$\nabla_j f=\partial_j f,$$

$$\nabla_j v^h=\partial_j v^h+\left\{{h \atop ji}\right\}v^i,$$

$$\nabla_j w_i=\partial_j w_i-\left\{{h \atop ji}\right\}w_h,$$

$$\nabla_k T_{ji}^{\cdot\cdot h}=\partial_k T_{ji}^{\cdot\cdot h}+\left\{{h \atop ka}\right\}T_{ji}^{\cdot\cdot a}-\left\{{a \atop kj}\right\}T_{ai}^{\cdot\cdot h}-\left\{{a \atop ki}\right\}T_{ja}^{\cdot\cdot h}$$

是它們的协变导数。

張量的协变微分和原張量是同类的，其协变导数是比原張量的协变指标多出一个的張量。

协变微分与协变导数满足普通的微分法則：

$$\delta(S+T)=\delta S+\delta T,\ \delta(ST)=(\delta S)T+S(\delta T),$$

$$\nabla(S+T)=\nabla S+\nabla T,\ \nabla(ST)=(\nabla S)T+S(\nabla T),$$

这是很容易驗証的。

如果沿某一条曲綫，对于張量的协变微分有

$$\frac{\delta T_{ji}^{\cdot\cdot h}}{dt}=0,$$

則称这个張量沿曲綫是平行的。例如在曲綫 $u^h=u^h(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$ 的端点 $u^h(t_0)$ 这个地方，給定一个向量 v_0^h，在初值条件：$t=t_0$ 和 $v^h=v_0^h$ 之下，解出微分方程

$$\frac{\delta v^h}{dt}=\frac{dv^h}{dt}+\left\{{h \atop ji}\right\}\frac{du^j}{dt}\,v^i=0,$$

設其解为 $v^h(t)$，則 $v^h(t)$ 是在点 $u^h(t_0)$ 处的向量 v_0^h 沿着曲綫平行移动而得到的。

基本張量 g_{ji} 的协变导数为

$$\nabla_k g_{ji}=\partial_k g_{ji}-\left\{{a \atop kj}\right\}g_{ai}-\left\{{a \atop ki}\right\}g_{ja}=0,$$

所以基本張量对协变微分而論是一个常量。

因此，当向量 v^h 平行移动时，有

$$d(g_{ji}v^jv^i)=\delta(g_{ji}v^jv^i)$$
$$=(\delta g_{ji})v^jv^i+g_{ji}(\delta v^j)v^i+g_{ji}v^j(\delta v^i)=0,$$

这就是說向量之长在平行移动时保持不变。

当两个向量 v^h 与 w^h 同时平行移动时，对于它們的交角有

$$\delta(\cos\theta)=\delta\left(\frac{g_{ji}v^jw^i}{v\cdot w}\right)$$
$$=\frac{1}{v\cdot w}[(\delta g_{ji})v^jw^i+g_{ji}(\delta v^j)w^i+g_{ji}v^j(\delta w^i)]=0,$$

这就是說两向量的交角在它們平行移动时保持不变。

Riemann 空間內的測地綫和曲面上的測地綫，其情况完全一样，由微分方程

$$\frac{d^2u^h}{ds^2}+\left\{{h \atop ji}\right\}\frac{du^j}{ds}\frac{du^i}{ds}=0$$

所确定，这个式子表示測地綫的切綫 $\frac{du^h}{ds}$ 是沿着測地綫按 Levi-Civita 意义作平行移动的。

§46　曲 率 張 量

协变微分的运算一般說来是不能交换的。实际上，如以 $\nabla_k\nabla_j-\nabla_j\nabla_k$ 这样形式的运算施于数量、向量、張量时，则有

$$\nabla_k\nabla_jf-\nabla_j\nabla_kf=0,$$
$$\nabla_k\nabla_jv^h-\nabla_j\nabla_kv^h=K_{kji}{}^{h}v^i,$$
$$\nabla_k\nabla_jw_i-\nabla_j\nabla_kw_i=-K_{kji}{}^{h}w_h,$$
$$\nabla_l\nabla_kT_{ji}{}^{h}-\nabla_k\nabla_lT_{ji}{}^{h}=K_{lka}{}^{h}T_{ji}{}^{a}-K_{lkj}{}^{a}T_{ai}{}^{h}-K_{lki}{}^{a}T_{ja}{}^{h}.$$

这里的

$$K_{kji}{}^{h}=\partial_k\left\{{h \atop ji}\right\}-\partial_j\left\{{h \atop ki}\right\}+\left\{{h \atop ka}\right\}\left\{{a \atop ji}\right\}-\left\{{h \atop ja}\right\}\left\{{a \atop ki}\right\}$$

称为 **Riemann-Christoffel 曲率張量**。上面所举的那些式子叫

做 Ricci 公式。和曲面的情况一样，$K_{kji}{}^{h}=0$ 的空間从局部看来是 Euclid 空間。

曲率張量满足

$$K_{kji}{}^{h}=-K_{jki}{}^{h},\quad K_{kji}{}^{h}+K_{jik}{}^{h}+K_{ikj}{}^{h}=0,$$

这可从曲率張量的定义看出。对于 g_{ih}，应用 Ricci 公式，就有

$$0=\nabla_k\nabla_j g_{ih}-\nabla_j\nabla_k g_{ih}=-K_{kji}{}^{a}g_{ah}-K_{kjh}{}^{a}g_{ia},$$

因此，如以

$$K_{kjih}=K_{kji}{}^{a}g_{ah},$$

則得

$$K_{kjih}=-K_{kjhi},$$

及

$$K_{kjih}+K_{jikh}+K_{ikjh}=0.$$

对 K_{kjih} 进行实际計算，則

$$K_{kjih}=\frac{1}{2}(\partial_k\partial_i g_{jh}+\partial_j\partial_h g_{ki}-\partial_k\partial_h g_{ji}-\partial_j\partial_i g_{kh})$$

$$-g_{ba}\left(\begin{Bmatrix}b\\kh\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ji\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}b\\ki\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\jh\end{Bmatrix}\right),$$

从这里看出，K_{kjih} 非满足

$$K_{kjih}=K_{ihkj}$$

不可。

因为 $K_{kji}{}^{h}$ 是張量，可关于 h 与 k 进行縮約而得

$$K_{ji}=K_{aji}{}^{a},$$

称为 Ricci 張量；再以 g^{ji} 乘 K_{ji}，然后进行縮約，得

$$K=g^{ji}K_{ji},$$

称做曲率数量。以 g^{kh} 乘关系式 $K_{kjih}+K_{jikh}+K_{ikjh}=0$ 之后再进行縮約，如注意到

$$g^{kh}K_{jikh}=0,\quad g^{kh}K_{ikjh}=-g^{kh}K_{kijh}=-K_{ij},$$

則有

$$K_{ji}=K_{ij},$$

亦卽 Ricci 張量是对称的。Ricci 張量滿足

$$K_{ji}=\frac{1}{n}Kg_{ji}$$

的空間称做 **Einstein 空間**。

以 Ricci 公式应用于任意协变向量場 w_i 的协变导数 $\nabla_j w_i$, 更对指标作适当調換,則得

$$\nabla_l\nabla_k\nabla_j w_i-\nabla_k\nabla_l\nabla_j w_i=-K_{lkj}{}^{a}\nabla_a w_i-K_{lki}{}^{a}\nabla_j w_a,$$

$$\nabla_k\nabla_j\nabla_l w_i-\nabla_j\nabla_k\nabla_l w_i=-K_{kjl}{}^{a}\nabla_a w_i-K_{kji}{}^{a}\nabla_l w_a,$$

$$\nabla_j\nabla_l\nabla_k w_i-\nabla_l\nabla_j\nabla_k w_i=-K_{jlk}{}^{a}\nabla_a w_i-K_{jli}{}^{a}\nabla_k w_a.$$

另一方面,对于 Ricci 公式 $\nabla_k\nabla_j w_i-\nabla_j\nabla_k w_i=-K_{kji}{}^{a}w_a$, 施以运算子 ∇_l, 更对指标作适当調換,則得

$$\nabla_l\nabla_k\nabla_j w_i-\nabla_l\nabla_j\nabla_k w_i=-(\nabla_l K_{kji}{}^{a})w_a-K_{kji}{}^{a}\nabla_l w_a,$$

$$\nabla_k\nabla_j\nabla_l w_i-\nabla_k\nabla_l\nabla_j w_i=-(\nabla_k K_{jli}{}^{a})w_a-K_{jli}{}^{a}\nabla_k w_a,$$

$$\nabla_j\nabla_l\nabla_k w_i-\nabla_j\nabla_k\nabla_l w_i=-(\nabla_j K_{lki}{}^{a})w_a-K_{lki}{}^{a}\nabla_j w_a.$$

从前面三式之和减去后面三式之和,得到

$$(\nabla_l K_{kji}{}^{a}+\nabla_k K_{jli}{}^{a}+\nabla_j K_{lki}{}^{a})w_a=0,$$

但因 w_a 是任意的,所以得到

$$\nabla_l K_{kji}{}^{a}+\nabla_k K_{jli}{}^{a}+\nabla_j K_{lki}{}^{a}=0,$$

这式称为 **Bianchi 恒等式**。

在这恒等式里以 $a=l$ 再进行縮約,則有

$$\nabla_a K_{kji}{}^{a}-\nabla_k K_{ji}+\nabla_j K_{ki}=0.$$

以 g^{ji} 乘这个式子后再进行縮約,如注意到 $g^{ji}K_{kji}{}^{a}=K_k{}^{a}(=K_{kj}g^{ja})$, 則

$$2\nabla_a K_k{}^{a}-\nabla_k K=0. \tag{46.1}$$

因而有

$$\nabla_a\left(K_k^a-\frac{1}{2}K\delta_k^a\right)=0.$$

这个式子在相对論里起着重要的作用。

对于在空間内一点 P 的两个綫性无关向量 v^h 与 w^h，作

$$k=\frac{-K_{kjih}v^kw^jv^iw^h}{(g_{kh}g_{ji}-g_{jh}g_{ki})v^kw^jv^iw^h},$$

这称为对 v^h, w^h 所确定的平面的**截綫曲率**。在点 P 和这个平面相切的測地綫之集組成一个曲面，剛才定义的那个曲率就是这个曲面在点 P 的 Gauss 曲率。

如果对于任何一条截綫，以上所定的 k 是定值时，则 K_{kjih} 有形式

$$K_{kjih}=-k(g_{kh}g_{ji}-g_{jh}g_{ki}).$$

計算 k，得到 $-k=\frac{K}{n(n-1)}$，因此，上式可写成

$$K_{kjih}=\frac{K}{n(n-1)}(g_{kh}g_{ji}-g_{jh}g_{ki}).$$

这样的空面称为**常曲率空間**。

由最后一个式子又得到

$$K_{ji}=\frac{K}{n}g_{ji},$$

所以常曲率空間是 Einstein 空間。

对于 Einstein 空間，把上式代进(46.1)里去，得到

$$\nabla_kK=0.$$

因此，K 是定量。

§ 47 Lie 微分[1]

現在来討論把 Riemann 空間內一点 (u^h) 移至附近一点 $('u^h)$

---

[1] 这一节是关于 Lie 微分的极概括叙述，詳細情况見著者的书，The Theory of Lie Derivatives and its Applications.——譯者注

$=(u^h+\xi^h(u)dt)$ 去的无限小变换

$$'u^h=u^h+\xi^h(u)dt. \qquad (47.1)$$

在这变换下，使 Riemann 度量 $ds^2=g_{ji}(u)du^jdu^i$ 不变的条件是

$$g_{ji}(u)du^jdu^i=g_{ji}(u+\xi dt)(du^j+d\xi^jdt)(du^i+d\xi^idt),$$

因此，只考虑到 dt 的一次項时，所得条件是

$$\xi^k\partial_kg_{ji}+(\partial_j\xi^a)g_{ai}+(\partial_i\xi^a)g_{ja}=0.$$

这样的无限小变换叫做**无限小运动**。如果空間内容許无限小运动时，假設取这样的坐标系使 $\xi^h=\delta_1^h$，从上式有 $\partial_1g_{ji}=0$，这就是說 g_{ji} 不含 u^1，則空間内其实是容許了有限运动 $'u^h=u^h+\delta_1^ht$.

在上式内用 $\partial_kg_{ji}=\left\{\begin{matrix}a\\kj\end{matrix}\right\}g_{ai}+\left\{\begin{matrix}a\\ki\end{matrix}\right\}g_{ja}$ 代入，經計算后，得到

$$\nabla_j\xi_i+\nabla_i\xi_j=0 \qquad (\xi_j=g_{ji}\xi^i). \qquad (47.2)$$

这个式子叫 **Killing 公式**。

一般情况下，以支量表示的一个几何量，例如張量 $T_{ji}^{\cdot\cdot h}$ 給出时，如有一个无限小变换(47.1)使坐标系(u^h)通过变换

$$u^{h'}=u^h+\xi^h(u)dt \qquad (47.3)$$

移于坐标系 $(u^{h'})$，則可定义在坐标系$(u^{h'})$下的支量 $'T_{j'i'}^{\cdot\cdot h'}$ 等于 $T_{ji}^{\cdot\cdot h}(u+\xi dt)$ 的張量，即

$$'T_{j'i'}^{\cdot\cdot h'}=T_{ji}^{\cdot\cdot h}(u+\xi dt).$$

这个張量在原坐标系(u^h)下的支量 $'T_{ji}^{\cdot\cdot h}$ 由下式給定：

$$'T_{ji}^{\cdot\cdot h}=(\delta_j^c+\partial_j\xi^cdt)(\delta_i^b+\partial_i\xi^bdt)(\delta_a^h-\partial_a\xi^hdt)T_{cb}^{\cdot\cdot a}(u+\xi dt),$$

亦即

$$'T_{ji}^{\cdot\cdot h}=T_{ji}^{\cdot\cdot h}+(\xi^k\partial_kT_{ji}^{\cdot\cdot h}-T_{ji}^{\cdot\cdot a}\partial_a\xi^h+T_{ai}^{\cdot\cdot h}\partial_j\xi^a+T_{ja}^{\cdot\cdot h}\partial_i\xi^a)dt.$$

这时，$'T_{ji}^{\cdot\cdot h}-T_{ji}^{\cdot\cdot h}$ 称为 $T_{ji}^{\cdot\cdot h}$ 关于无限小变换(47.1)的 **Lie 微分**。而$('T_{ji}^{\cdot\cdot h}-T_{ji}^{\cdot\cdot h})/dt$ 则称为 **Lie 导数**或单称为 Lie 微分，且以如下的式子表示

$$\pounds T_{ji}^{\cdot\cdot h}=\xi^k\partial_kT_{ji}^{\cdot\cdot h}-T_{ji}^{\cdot\cdot a}\partial_a\xi^h+T_{ai}^{\cdot\cdot h}\partial_j\xi^a+T_{ja}^{\cdot\cdot h}\partial_i\xi^a. \qquad (47.4)$$

这个式子如用协变微分来写，則有

$$\pounds T_{ji}^{\cdot\cdot h}=\xi^k\nabla_k T_{ji}^{\cdot\cdot h}-T_{ji}^{\cdot\cdot a}\nabla_a\xi^h+T_{ai}^{\cdot\cdot h}\nabla_j\xi^a+T_{ja}^{\cdot\cdot h}\nabla_i\xi^a.$$

如計算基本張量 g_{ji} 的 Lie 微分，則得

$$\pounds g_{ji}=\xi^k\nabla_k g_{ji}+g_{ai}\nabla_j\xi^a+g_{ja}\nabla_i\xi^a=\nabla_j\xi_i+\nabla_i\xi_j,$$

如再利用 Killing 公式，則知这式的右边等于 0，于是得下面的定理。

定理 无限小变換成为运动的必要与充分条件是基本張量的 Lie 微分等于 0。

为了对于 Christoffel 記号 $\left\{{h \atop ji}\right\}$，适用 Lie 微分的定义，当施行坐标变換(47.3)时，在坐标系 $(u^{h'})$ 下的新記号 $'\left\{{h' \atop j'i'}\right\}$ 以

$$'\left\{{h' \atop j'i'}\right\}=\left\{{h \atop ji}\right\}(u+\xi dt)$$

来定义。这个記号在原坐标系下的支量 $'\left\{{h \atop ji}\right\}$ 是

$$'\left\{{h \atop ji}\right\}=(\delta_a^h-\partial_a\xi^h dt)\left[(\delta_j^c+\partial_j\xi^c dt)(\delta_i^b+\partial_i\xi^b dt)\left\{{a \atop cb}\right\}(u+\xi dt)+\partial_j\partial_i\xi^a dt\right],$$

亦即

$$'\left\{{h \atop ji}\right\}=\left\{{h \atop ji}\right\}+\left(\partial_j\partial_i\xi^h+\xi^k\partial_k\left\{{h \atop ji}\right\}-\left\{{a \atop ji}\right\}\partial_a\xi^h+\left\{{h \atop ai}\right\}\partial_j\xi^a+\left\{{h \atop ja}\right\}\partial_i\xi^a\right)dt.$$

因此，$\left\{{h \atop ji}\right\}$ 的 Lie 微分由下式給定：

$$\pounds\left\{{h \atop ji}\right\}=\partial_j\partial_i\xi^h+\xi^k\partial_k\left\{{h \atop ji}\right\}-\left\{{a \atop ji}\right\}\partial_a\xi^h+\left\{{h \atop ai}\right\}\partial_j\xi^a+\left\{{h \atop ja}\right\}\partial_i\xi^a.$$

如用协变微分与曲率張量，則上式可改写成

$$\pounds\left\{ {h \atop ji} \right\}=\nabla_j\nabla_i\xi^h+K_{kji}{}^{h}\xi^k. \tag{47.5}$$

对于空間内的无限小变换(47.1),空間内任意一条测地綫

$$\frac{d^2\xi^h}{ds^2}+\left\{ {h \atop ji} \right\}\frac{d\xi^j}{ds}\frac{d\xi^i}{ds}=0$$

移到另一条测地綫,使其上的参数 s 受到象

$$'s=as+b \qquad (a,\ b \text{ 是常数},\ a\neq 0)$$

这样的仿射变换,其条件可求得是

$$\pounds\left\{ {h \atop ji} \right\}=\nabla_j\nabla_i\xi^h+K_{kji}{}^{h}\xi^k=0.$$

象这样的无限小变换我們称为**无限小仿射的直射变换** (infinitesimal affine collineation)。

g_{ji} 的 Lie 微分和 $\left\{ {h \atop ji} \right\}$ 的 Lie 微分間有关系

$$\pounds\left\{ {h \atop ji} \right\}=\frac{1}{2}g^{ha}(\nabla_j\pounds g_{ia}+\nabla_i\pounds g_{ja}-\nabla_a\pounds g_{ji}), \tag{47.6}$$

这是可以通过計算来确定的。从上面关于 $\pounds\left\{ {h \atop ji} \right\}$ 的式子还可确定如下的关系式

$$\nabla_k\pounds\left\{ {h \atop ji} \right\}-\nabla_j\pounds\left\{ {h \atop ki} \right\}=\pounds K_{kji}{}^{h}. \tag{47.7}$$

运算子 ∇_j 和 $\pounds$ 交换时,則有

$$\nabla_j\pounds v^h-\pounds\nabla_j v^h=\left(\pounds\left\{ {h \atop ji} \right\}\right)v^i, \tag{47.8}$$

$$\nabla_j\pounds w_i-\pounds\nabla_j w_i=-\left(\pounds\left\{ {h \atop ji} \right\}\right)w_h; \tag{47.9}$$

$$\nabla_k\pounds T_{ji}{}^{h}-\pounds\nabla_k T_{ji}{}^{h}=\left(\pounds\left\{ {h \atop ka} \right\}\right)T_{ji}{}^{a}$$
$$-\left(\pounds\left\{ {a \atop kj} \right\}\right)T_{ai}{}^{h}-\left(\pounds\left\{ {a \atop ki} \right\}\right)T_{ja}{}^{h}. \tag{47.10}$$

从(47.6)当然有下面的定理。

定理 运动是仿射的直射变换。

其次，从(47.7)以及使(47.10)适用于曲率張量的式子，则得定理：

定理 对于运动有 $\pounds K_{kji}{}^{h}=0$, $\pounds \nabla_l K_{kji}{}^{h}=0, \cdots$.

更从(47.8)，(47.9)，(47.10)得定理：

定理 对于仿射的直射变换，协变微分与 Lie 微分是可交换的。

如果 ξ^h 与 η^h 规定了运动，则

$$[\xi, \eta]^h=\xi^i\partial_i\eta^h-\eta^i\partial_i\xi^h$$

也规定一个运动，这可用計算来証明。

今設空間内容許一个由 ξ^h 所規定的运动，则 ξ^h 不能不满足

$$\pounds g_{ji}=\nabla_j\xi_i+\nabla_i\xi_j=0,\ \pounds\left\{\begin{matrix}h\\ ji\end{matrix}\right\}=\nabla_j\nabla_i\xi^h+K_{kji}{}^{h}\xi^k=0.$$

这些式子可以看成是关于 ξ^h 与 $\xi_i{}^h$ 的偏微分方程

$$\xi_{ji}+\xi_{ij}=0 \qquad (\xi_{ji}=\xi_j{}^a g_{ai}),$$

$$\nabla_i\xi^h=\xi_i{}^h, \quad \nabla_j\xi_i{}^h=-K_{kji}{}^{h}\xi^k.$$

这些偏微分方程的解内所含参数的最大个数是满足 $\xi_{ji}+\xi_{ij}=0$ 的 ξ^h 与 $\xi_i{}^h$ 的个数，也就是

$$n+n^2-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1).$$

因此，有下面的定理。

定理 空間内容許的运动群的参数，其最大个数是 $\frac{1}{2}n(n+1)$.

如果空間内容許这样最多参数的运动群，那么，以上的联立偏微分方程組就不能不是完全可积的。因此，其可积条件

$$\pounds K_{kji}{}^{h}=\xi^l\nabla_l K_{kji}{}^{h}-K_{kji}{}^{a}\xi_a{}^h+K_{aji}{}^{h}\xi_k{}^a$$

$$+K_{kai}{}^{h}\xi_j{}^a+K_{kja}{}^{h}\xi_i{}^a=0$$

不能不被任意的 ξ^h 以及适合 $\xi_{ji}+\xi_{ij}=0$ 的 $\xi_i{}^h$ 所满足。从这里可

計算出

$$K_{kji}^{\cdots h}=\frac{K}{n(n-1)}(\delta_k^h g_{ji}-\delta_j^h g_{ki}).$$

因而得到下面的定理。

定理 如空間内容許最大次数 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 的运动群，則空間是常曲率空間。